

ESTUDO DA EFICIÊNCIA DE PLANEJAMENTOS EM EXPERIMENTOS  
LONGITUDINAIS

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. PAULO ROBERTO PERILLI e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 30 de abril de 1992

Prof. Dr.

  
DALTON FRANCISCO DE ANDRADE†

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em ESTATÍSTICA.

A memória de minha mãe, que sempre sinalizou  
como uma luz inspiradora nos momentos  
mais difíceis deste trabalho.

## **Agradecimentos**

A minha esposa Rosa Maria e aos meus filhos Thomaz Antônio e Paulo Roberto por toda compreensão, carinho e apoio manifestados ao longo de todo este período.

Ao meu pai a gratidão por ter galgado tantos degraus na vida que acredito só foi possível com sua inestimável ajuda.

As minhas irmãs pela solidariedade e incentivo.

Ao Prof. Dr. Dalton Francisco de Andrade por todo estímulo e aprendizado proporcionados neste trabalho.

Ao Prof. Dr. Armando Mário Infante pelas sugestões apresentadas.

Ao Prof. Dr. Clóvis de Araújo Peres pela sugestão do BIB.

Ao Prof. Dr. José Francisco Soares por todo apoio e amizade que nos motivou na superação das mais diversas etapas.

Ao amigo Aristídes Dornas Júnior pela revisão ortográfica.

E a todos os demais amigos que nos ajudaram e incentivaram na execução deste trabalho.

## SUMÁRIO

<b>Capítulo 1 - Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 - Aspectos importantes do planejamento	2
1.1.1 - Necessidades para a adequação do experimento	4
1.1.2 - Redução do erro	5
1.1.3 - Uso de covariável	6
1.1.4 - Aleatorização	7
1.2 - Estudos longitudinais	8
1.3 - Planejamentos mistos propostos	16
1.4 - Objetivos do trabalho	17
 <b>Capítulo 2 - Propostas de planejamentos, estruturas de covari-</b>	
<b>ância e medidas de eficiência</b>	<b>19</b>
2.1 - O planejamento longitudinal puro e as estruturas de	
covariância	19
2.2 - Os planejamentos mistos	23
2.2.1 - Planejamento transversal (T)	25
2.2.2 - Planejamento com duas observações consecuti-	
vas (DC)	26
2.2.3 - Planejamento com três observações consecuti-	
vas (TC)	27
2.2.4 - Planejamento proposto por Rao e Rao (RAO)	28
2.2.5 - Planejamento proposto por Berger (BG)	29
2.2.6 - Planejamento proposto por Machin (MC)	31
2.2.7 - Planejamento a partir de blocos incompletos	
balanceados (BIB)	33

2.3 - Eficiência dos planejamentos . . . . .	36
2.4 - Medida de eficiência para os planejamentos propostos .	38
2.4.1 - O planejamento longitudinal . . . . .	39
2.4.2 - O planejamento misto . . . . .	39
2.4.2.1 - O planejamento transversal . . . . .	41
2.4.2.2 - O planejamento com duas observações con-	
secutivas . . . . .	41
2.4.2.3 - O planejamento com três observações con-	
secutivas . . . . .	42
2.4.2.4 - O planejamento proposto por Rao e Rao .	43
2.4.2.5 - O planejamento proposto por Berger . .	47
2.4.2.6 - O planejamento proposto por Machin . .	48
2.4.2.7 - O planejamento segundo a estrutura de	
blocos incompletos balanceados . . . . .	49

Capítulo 3 - Descrição do processo de simulação e análise	
dos resultados . . . . .	50
3.1 - Descrição do processo de simulação . . . . .	50
3.1.1 - As condições de avaliação . . . . .	51
3.1.2 - As estruturas de covariância . . . . .	51
3.2 - Apresentação e análise dos resultados . . . . .	54
3.2.1 - Eficiência do planejamento misto em relação	
ao planejamento longitudinal puro . . . . .	54
3.2.1.1 - Estrutura uniforme . . . . .	55
3.2.1.2 - Estrutura AR(1) . . . . .	64
3.2.1.3 - Estrutura auto-regressiva geral . . . . .	72
3.2.1.4 - Estrutura de efeitos aleatórios . . . . .	101

<b>Capítulo 4 - A condição de invariância, a redução no número</b>	
de unidades experimentais e sugestões finais . . .	115
4.1 - A condição de invariância . . . . .	115
4.2 - Redução no número de unidades experimentais . . . .	119
4.3 - Sugestões finais . . . . .	124
<b>Apêndice . . . . .</b>	<b>126</b>
<b>Bibliografia . . . . .</b>	<b>130</b>

# **Estudo da Eficiência de Planejamentos em Experimentos Longitudinais**

## **Resumo**

Consideramos diferentes propostas de Planejamentos Mistos para diferentes estruturas de covariância entre as observações, e mostramos em que situações os Planejamentos Mistos Propostos são mais eficientes do que o Planejamento Longitudinal Puro. Para avaliar o desempenho dos Planejamentos Mistos Propostos em relação ao Planejamento Longitudinal Puro, utilizamos como medida de eficiência o quociente das variâncias generalizadas que foram obtidas a partir da estimativa do vetor de parâmetros associado ao modelo linear simples.

## CAPITULO 1

### INTRODUÇÃO

Quando falamos em pesquisa científica é indispensável destacar que a etapa de experimentação é de grande importância para que a mesma seja bem sucedida.

A partir desta idéia podemos, então, dizer que planejar experimentos nas diversas áreas do conhecimento humano adquire cada vez mais importante conotação dentro do processo da investigação científica.

A justificativa para tal procedimento está inserida na própria filosofia de experimentação, que busca objetivamente resultados com determinado grau de qualidade e precisão.

A adoção por parte de pesquisadores de uma postura reflexiva os levará, com certeza, ao questionamento crítico de seus estudos, criando condições adequadas para a inserção definitiva do planejamento como uma etapa imprescindível para o bom desenvolvimento da pesquisa.



## 1.1 - ASPECTOS IMPORTANTES DO PLANEJAMENTO

Nesta seção, vamos apresentar algumas idéias básicas sobre planejamento de experimentos sendo que nosso objetivo é o de simplesmente comentar alguns aspectos que consideramos importantes e que terão utilidade em *Estudos Longitudinais* (ver seção 1.2). Para o leitor interessado em aprofundar seus conhecimentos acerca do assunto, recomendamos como fonte de referência, Kempthorne (1952), Cochran e Cox (1957), Cox (1958) , Box, Hunter e Hunter (1978), entre outros.

Inicialmente, devemos nos preocupar com a caracterização das *unidades experimentais*, tratamentos e observações.

Uma *unidade experimental* representa uma fração adequada do material experimental, onde a aplicação de um tratamento fornece uma ou mais observações. Quando a medida da variável de interesse está sujeita a oscilações como, por exemplo, pressão arterial, deve-se efetuar mais de uma medida e utilizar uma medida resumo (média, mediana, etc...) como observação a ser analisada. É recomendável que as *unidades experimentais* sejam independentes, para que as observações coletadas possam refletir da melhor forma possível os efeitos dos tratamentos aplicados. Entretanto, em muitos experimentos onde as *unidades experimentais* são utilizadas várias vezes, a aplicação

dos tratamentos deve ser cuidadosa para evitar a interferência entre os efeitos dos mesmos. Como exemplo desta situação temos, que na avaliação do efeito de diferentes dietas na produção de leite , eventuais problemas ( como efeitos residuais de tratamentos ) podem surgir quando os animais são submetidos a todas as dietas. Este procedimento pode gerar complicações, e consequentemente comprometer o experimento.

Por sua vez, a conceituação dos tratamentos está diretamente associada com os objetivos do estudo e com o conhecimento prévio da área de pesquisa, sendo que podemos defini-los a partir dos níveis de um fator ou da combinação dos mesmos, quando o experimento apresenta mais de um fator.

Quanto às observações, devemos nos preocupar com a precisão desejada das eventuais comparações que serão efetuadas no estudo. Muitas vezes a determinação da precisão com a qual se deseja conduzir o experimento exige, por parte de pesquisadores, o conhecimento prévio de estudos similares. Outra alternativa disponível seria, preliminarmente, realizar um estudo piloto que poderá fornecer as informações necessárias para uma possível reavaliação da precisão desejada, conforme seja o tamanho requerido da amostra para se alcançar os objetivos fixados no experimento.

Devemos ainda ressaltar que o controle de algumas fontes estranhas de variabilidade como, por exemplo, fatores

ambientais em experimentos agropecuários, a formulação das hipóteses de interesse, assim como a metodologia de análise dos resultados experimentais representam também pontos importantes que estão diretamente atrelados ao planejamento.

### **1.1.1 - NECESSIDADES PARA A ADEQUAÇÃO DO EXPERIMENTO**

A elaboração de um experimento requer alguns pressupostos para que sua qualidade não seja comprometida. É de grande importância, para o seu desenvolvimento, que se faça um efetivo controle das fontes estranhas de variabilidade, pois, as prováveis comparações de interesse devem refletir o quanto possível os efeitos dos tratamentos. Devemos, portanto, nos preocupar, de forma concreta, com os fatores externos que afetam o fenômeno em estudo, de maneira tal que as flutuações ocorridas possam ser consideradas como aleatórias, espelhando com isso variações inerentes do próprio experimento.

Para estabelecermos com que precisão desejamos comparar os resultados, precisamos ter a priori o conhecimento das características do material experimental, associado com uma medida de eficiência na condução do experimento. Entretanto, não podemos nos esquecer do plano experimental, devido ao seu encadeamento com a metodologia de análise dos resultados, a qual,

em casos de inadequação pode afetar a precisão.

Extraír conclusões de experimentos, exige conhecimento por parte de pesquisadores. A extrapolação dos resultados é de grande interesse e deve ser feita de forma criteriosa. Devemos também nos preocupar com a validação das possíveis conclusões quando introduzimos modificações em estudos similares.

Finalmente, sempre que possível, devemos ser capazes de planejar experimentos que tenham como característica principal a simplicidade.

### 1.1.2 - REDUÇÃO DO ERRO

Uma preocupação importante, que tem direcionado muitos pesquisadores para a racionalização de seus estudos, é a presença do erro, que pode ser de natureza sistemática ou aleatória. Geralmente a obtenção de resultados experimentais satisfatórios, está associada a existência de condições adequadas para a realização do experimento. Para que este ambiente propício seja criado, é necessário incorporar o conhecimento do pesquisador ao processo de definição e seleção das *unidades experimentais* e da alocação dos tratamentos. Quando as *unidades*

*experimentais* não são homogêneas é conveniente agrupá-las na tentativa de reduzir as fontes de erro, de tal forma que a comparação dos tratamentos possa ser a mais fidedigna possível.

### 1.1.3 - USO DE COVARIÁVEL

A informação contida em uma variável adicional, usualmente chamada covariável, poderá aumentar sensivelmente a precisão das comparações a serem efetuadas no experimento. Devemos entretanto ressaltar que, sua incorporação ao estudo somente ocorrerá após um processo de avaliação criteriosa envolvendo, a relação custo/benefício, a facilidade na sua obtenção e controle, e, principalmente, a confirmação de que não será afetada pela aplicação dos tratamentos, pois, neste caso poderá confundir as comparações de interesse do estudo. Por exemplo, quando estamos interessados em avaliar o peso de animais em função de alguma dieta alimentar, o peso inicial dos animais representa uma covariável que pode ser incorporada ao estudo.

#### 1.1.4 - ALEATORIZAÇÃO

Com toda certeza constitui um dos pontos mais importantes do planejamento de experimentos. Sua abrangência é tão evidente que, muitas questões envolvendo o planejamento, são justificadas cientificamente por sua adoção.

Podemos dizer que seu objetivo é o de validar as comparações que serão efetuadas e gerar uma medida genuína da variabilidade dos resultados.

Devemos ainda lembrar dos aspectos operacionais envolvidos na experimentação científica. Por isto, é necessário compor uma equipe diversificada de especialistas de alto nível, que possam acompanhar o projeto desde a sua concepção até a sua conclusão. Com certeza, o sucesso do experimento dependerá também da preparação adequada da equipe.

Não podemos nos esquecer da possibilidade de perda de informação. A criação de mecanismos que minimizem tais perdas é importante para o desenvolvimento do experimento. Portanto, a disponibilidade de recursos financeiros, não pode ser relegada a um plano secundário. Seria então recomendável o pleno conhecimento dos recursos existentes, para podermos elaborar o plano experimental em conformidade com os mesmos.

Finalmente, para a implementação e acompanhamento do experimento, é necessário a elaboração do Protocolo Experimental, pois o mesmo, descreverá como os tratamentos deverão ser alocados às *unidades experimentais*.

## 1.2 - ESTUDOS LONGITUDINAIS

*Estudos Longitudinais* são caracterizados pelo acompanhamento de uma ou mais *unidades experimentais*, através de repetidas observações feitas em diferentes *condições de avaliação* ( como por exemplo : tempo, distância de uma certa origem, doses de um medicamento, etc...). Nesta classe de estudos, o tempo é a dimensão que surge com maior frequência no acompanhamento de variáveis de interesse.

É importante destacar que a seleção da(s) variável(eis) de interesse, a fixação da duração do estudo, a definição das *condições de avaliação* e a determinação do tamanho da amostra, constituem um desafio que pode ser enfrentado com inteligência quando pesquisador e estatístico procuram interagir de forma racional no planejamento do estudo.

A apresentação a seguir de alguns exemplos, nos fornecerá uma ampla perspectiva da dimensão de *Estudos Longitudinais* no contexto da Ciência.

- 1 - Avaliar o crescimento em altura e peso de crianças durante os três primeiros anos de vida.
- 2 - Avaliar a evolução da produção de leite para o gado alimentado com diferentes dietas no período de um ano.
- 3 - Estudar os efeitos da poluição sonora no desenvolvimento da capacidade auditiva de crianças, em função de diferentes distâncias que elas se encontram das fontes poluidoras.
- 4 - Avaliar o desenvolvimento intelectual de crianças, entre 8 e 10 anos de idade, através da habilidade mental primária.
- 5 - Investigar a influência do tabagismo no surgimento de câncer no pulmão em pessoas na faixa etária de 40 a 50 anos.

No exemplo 1, temos que as crianças vão ser acompanhadas durante três anos, sendo que as observações poderão ser feitas (por exemplo : semanalmente, mensalmente, semestralmente, etc...) conforme seja mais recomendável para a realização do estudo.

No último exemplo apesar do acompanhamento dos indivíduos ser feito sequencialmente, devemos ressaltar que o estudo terá seu desenvolvimento interrompido quando for diagnosticado que a pessoa contraiu a doença. Estudos desta natureza são chamados " *follow-up studies* " e, aparecem com



frequência quando estamos interessados em observar um fenômeno até que um certo evento ocorra. Na literatura são também denominados *Estudos de Sobrevivência* e para maiores detalhes podemos indicar como fontes de referência Kalbfleisch e Prentice (1980) e Elandt-Johnson e Johnson (1980). Neste trabalho, esta classe de estudos não é considerada.

Complementando o que foi dito anteriormente, é importante mencionar que em *Estudos Longitudinais* podemos estar interessados em outras questões como :

- 1) Verificação da existência de interação entre tratamentos e *condições de avaliação*.
- 2) Comparação dos tratamentos ao longo das *condições de avaliação* com o objetivo de investigar a existência de efeito dos tratamentos.
- 3) Investigação acerca das *condições de avaliação* para verificar se as mesmas modificam o perfil das respostas médias fornecidas pelos tratamentos.

Os objetivos descritos anteriormente poderão ser respondidos através de técnicas estatísticas tais como Análise de Perfis ( consultar Morrison (1976), Winer (1971), etc...), e Análise de Curvas de Crescimento ( ver Wishart (1938), Box (1950), Elston e Grizzle (1962), Potthoff e Roy (1964), Singer (1977) etc...).

Neste ponto, é importante ponderar se as *unidades experimentais* devem ou não ser observadas em todas as *condições de avaliação*, considerando os aspectos descritos na seção 1.1.

Basicamente, existem três tipos de planejamentos de experimentos em *Estudos Longitudinais* que serão apresentados a seguir :

1) *Planejamento Transversal* ( " *Cross-Sectional* " ), é o que aparentemente apresenta maior simplicidade. Sua principal característica está no fato de que cada *unidade experimental* é planejada para ser observada em uma única *condição de avaliação*.

2) *Planejamento Longitudinal Puro*, apresenta maior grau de complexidade, pois, todas as *unidades experimentais* são planejadas para serem observadas em todas as *condições de avaliação*.

3) *Planejamento Misto* ( " *Linked Cross-Sectional* " ), representa uma composição dos dois tipos de planejamentos mencionados anteriormente. Diferentes *unidades experimentais* são planejadas para serem observadas em determinadas *condições de avaliação*, através da seleção amostral feita transversalmente e que terá acompanhamento longitudinal.

Rao e Rao (1966), apresentam um problema concreto, cujo objetivo é estimar o peso médio de rapazes na faixa etária de 6 a 18 anos. Podemos então criar condições para a apreciação do problema através das diferentes perspectivas.

Sob o enfoque *Transversal*, selecionaremos indivíduos de todas as idades e, então, iremos observá-los em uma única *condição de avaliação*. Todos eles formarão grupos independentes, cujas *unidades experimentais* serão investigadas uma única vez.

Considerando agora o *Planejamento Longitudinal Puro*, vamos compor uma amostra que vai gerar um único grupo de indivíduos com idade de 6 anos, que serão observados anualmente até a idade de 18 anos.

No *Planejamento Misto*, vamos selecionar indivíduos em determinadas idades e fazer o acompanhamento longitudinal dos mesmos em um fixado período. Formaremos então alguns grupos a serem observados. Por exemplo, através de um procedimento aleatório escolhemos rapazes nas idades de 6, 7, 9, 12, 14, 15 e 16 anos e estabelecemos a duração do estudo em 2 anos. Teremos então, os indivíduos de 6 anos avaliados até a idade de 8 anos. Analogamente, os seis grupos restantes serão investigados simultaneamente para que o estudo não exceda o tempo previsto para a sua execução que é de 2 anos.

Novamente gostaríamos de frisar que, o critério de seleção do tipo de planejamento, será de grande importância para a avaliação dos resultados e, dependerá fundamentalmente dos objetivos do experimento.

Neste ponto, não podemos nos esquecer de comentar sobre os efeitos de desenvolvimento, tempo e coorte (" *cohort* " ) sendo que este último é representado pela própria descendência dos indivíduos ( geração ), pois, os mesmos surgem frequentemente em *Estudos Longitudinais* dificultando a interpretação dos resultados.

O efeito de desenvolvimento é caracterizado pelo desgaste natural que as *unidades experimentais* apresentam com o passar do tempo. Este processo de envelhecimento, por ser irreversível, tende a modificar o padrão das respostas ao longo das *condições de avaliação*. O efeito do tempo é representado pelo impacto de eventos que ocorrem nas *condições de avaliação*. Quanto ao efeito de coorte temos que o mesmo é representado pelo passado histórico de um particular coorte ( ver Goldstein (1979), Schaie (1965), Van't Hof, Roede e Kowalski (1977) , Cook e Ware (1983), etc...).

Em *Estudos Transversais* temos que a principal vantagem é a aparente simplicidade para a sua implementação, apesar da necessidade de um número maior de *unidades experimentais*. Todavia, sabemos que podem sugerir conclusões

inadequadas devido ao confundimento do efeito de desenvolvimento com o efeito de coorte, visto que todas as medidas são efetuadas em uma única *condição de avaliação*. Entretanto, não devemos descartar a utilização destes estudos, pois, algumas questões que exigem respostas imediatas podem ser avaliadas por esta estrutura observacional.

Na avaliação do quadro epidêmico *Estudos Transversais* têm enorme utilidade na detecção de anomalias muitas vezes preocupantes. A adoção de medidas profiláticas dependerá do conteúdo das informações que foram obtidas rapidamente. Em casos de confirmação de prováveis suspeitas, sobre o aumento da taxa de prevalência de uma doença, *Estudos Longitudinais* mais elaborados podem ser propostos.

Por outro lado, *Estudos Longitudinais Puros* permitem um melhor acompanhamento das *unidades experimentais*. Entretanto, apresentam grandes dificuldades para sua implementação e execução, assim como problemas de confundimento entre os efeitos de desenvolvimento e tempo, pois um único coorte é selecionado. Deste modo, aumentar o tamanho da amostra e/ou criar condições para que as *unidades experimentais* possam ser observadas nas ocasiões programadas, pode ser extremamente oneroso. Poderíamos então sugerir o *Planejamento Misto* como alternativa, visto que sua estrutura pode minimizar os problemas anteriores, principalmente, os relacionados com os aspectos de confundimento.

Um primeiro aspecto de fundamental importância na concepção deste planejamento, está associado com a redução do tempo para a realização do experimento que pode tornar o mesmo factível, além de aumentar sua precisão. Quanto às estimativas por ele produzidas, podemos dizer que são qualitativamente diferentes das obtidas através do *Estudo Longitudinal Puro*, apesar de serem " eficientes ". É importante frisar que o nosso interesse pelo *Planejamento Misto* é evidente quando o mesmo é mais eficiente do que o *Planejamento Longitudinal Puro* (ver seção 2.4). Além disso, outro aspecto relevante que contribui para sua adoção, se deve ao fato de que proporciona uma separação parcial dos efeitos de desenvolvimento, tempo e coorte. Por estas razões, acreditamos na adequabilidade desta forma de planejamento pelo fato de possuir maior sensibilidade na detecção de mudanças bruscas que ocorrem em locais cujo processo de desenvolvimento é intenso.

Finalmente, gostaríamos de destacar o crescimento do enfoque longitudinal no processo de experimentação científica, por representar o mesmo um avanço tecnológico que possibilita a investigação de forma mais refinada de questões que abrangem todo o conhecimento humano.

### 1.3 - PLANEJAMENTOS MISTOS PROPOSTOS

Neste tópico vamos apresentar os três tipos de *Planejamentos Mistos* que encontramos na literatura.

Rao e Rao (1966) propuseram que as *unidades experimentais* (indivíduos) fossem planejadas para serem observadas em uma única *condição de avaliação*, em duas *condições de avaliação* consecutivas, em duas *condições de avaliação* alternadas e em três *condições de avaliação consecutivas*.

Machin (1975) propôs que as *unidades experimentais* (animais) fossem observados em *condições de avaliação* alternadas.

Berger (1986) sugeriu um *Planejamento Misto* semelhante ao proposto por Machin sendo que as observações deveriam ser efetuadas consecutivamente ao longo das *condições de avaliação* e sem superposição entre coortes.

Os autores das sugestões anteriores mostraram que os *Planejamentos Mistos* propostos são mais "eficientes" do que o *Planejamento Longitudinal Puro* para algumas estruturas de dependência entre as observações efetuadas numa mesma *unidade experimental*.

Seguindo esta mesma linha de raciocínio, faremos a descrição do estudo que iremos desenvolver.

#### 1.4 - OBJETIVOS DO TRABALHO

O objetivo principal do trabalho é apresentar *Planejamentos Mistos* que sejam mais eficientes do que o *Planejamento Longitudinal Puro*.

Inicialmente, assumiremos que o total de *condições de avaliação* para a realização do estudo é  $p$  e que o comportamento da variável de interesse ao longo das *condições de avaliação*, onde pretendemos realizar o estudo, pode ser descrito aproximadamente por uma função linear simples.

A medida de eficiência entre os planejamentos é definida a partir da variância dos estimadores dos parâmetros do modelo proposto.

Diferentes estruturas de dependência entre as observações efetuadas em uma mesma *unidade experimental* serão consideradas.



Na composição deste trabalho, utilizamos o capítulo 1 para :comentar aspectos do planejamento de forma geral; definir *Estudos Longitudinais*; reavaliar a bibliografia e estabelecer os objetivos que vão nortear este estudo. No capítulo 2, vamos introduzir as diferentes propostas de *Planejamentos Mistos*, assim como falar de medidas de eficiência. No capítulo 3, faremos a descrição do processo de simulação que vai gerar os *Planejamentos Mistos* permitindo desta forma compará-los com o *Planejamento Longitudinal Puro* conforme seja a estrutura de covariância utilizada. Vamos, também, apresentar e comentar os resultados obtidos. Finalmente, no capítulo 4, iremos introduzir um resultado geral que consideramos muito importante seguido de comentários e sugestões.

## CAPITULO 2

### PROPOSTAS DE PLANEJAMENTOS, ESTRUTURAS DE COVARIÂNCIA E MEDIDAS DE EFICIÊNCIA

Neste capítulo iremos fazer a formalização matemática do *Planejamento Longitudinal* e das propostas de *Planejamentos Mistos*, descrição das estruturas de covariância e definição da medida de eficiência.

#### 2.1 - O PLANEJAMENTO LONGITUDINAL PURO E AS ESTRUTURAS DE COVARIÂNCIA

Conforme descrição feita no capítulo anterior, sabemos que para este tipo de planejamento as *unidades experimentais* são programadas para serem observadas em todas as *condições de avaliação* estabelecidas a priori. Neste caso, teremos então para cada *unidade experimental* um vetor  $\tilde{y}_i$ , com  $i = 1, \dots, n$ , de dimensão  $(p \times 1)$  que irá representar as observações individuais feitas nesta unidade nas  $p$  *condições de avaliação* programadas.

O vetor que irá representar as *condições de avaliação* é da seguinte forma :

$$\underset{\sim}{t} = ( t_1, t_2, \dots, t_p )' \quad (2.1)$$

Assim,

$$E(\underset{\sim}{y}_1) = \underset{\sim}{\mu} = ( \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p )' \quad (2.2)$$

(p x 1)

e

$$V(\underset{\sim}{y}_1) = \underset{\sim}{\Sigma} \quad (2.3)$$

onde  $\underset{\sim}{\mu}$  e  $\underset{\sim}{\Sigma}$  representam, respectivamente, o vetor das respostas médias ao longo das *condições de avaliação* e uma matriz de covariância.

Em *Estudos Longitudinais* é importante lembrar que as observações em uma mesma *unidade experimental* ao longo das *condições de avaliação* podem ser correlacionadas, sendo que esperamos que esta correlação decresça a medida que a distância entre elas aumente. Quanto à estrutura de covariância, temos que a mesma depende da característica em estudo e, em geral, das *condições de avaliação*. Deste modo, vamos considerar as estruturas mais usuais encontradas na literatura ( ver Jennrich e Schluchter (1986) ), quando as observações são positivamente correlacionadas.

Para a estrutura Uniforme temos que :

$$\Sigma_{\sim} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho & \rho & \dots & \rho \\ \rho & 1 & \rho & \rho & \dots & \rho \\ \rho & \rho & 1 & \rho & \dots & \rho \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \rho & \rho & \rho & \rho & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

onde  $\rho$  e  $\sigma^2$  representam ao longo das *condições de avaliação*, respectivamente, a correlação entre as observações feitas numa mesma *unidade experimental* e a variância. Esta estrutura apesar de ser utilizada em *Estudos Longitudinais* não é a mais apropriada pelo fato da correlação permanecer constante ao longo das *condições de avaliação*.

Para a estrutura Auto-Regressiva de primeira ordem ( AR(1) ) ou modelo de Markov ( ver Machin (1975) ) representamos  $\Sigma_{\sim}$  por :

$$\Sigma_{\sim} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \dots & \rho^{p-1} \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{p-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{p-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \rho^{p-1} & \rho^{p-2} & \rho^{p-3} & \rho^{p-4} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

onde  $\rho$  e  $\sigma^2$  representam a correlação entre duas observações consecutivas e a variância, respectivamente, ao longo das condições de avaliação. À medida que as observações se distanciam ao longo das condições de avaliação temos que o grau de associação entre as mesmas decresce segundo uma progressão geométrica. Esta estrutura é mais adequada por representar um comportamento mais condizente com a realidade de *Estudos Longitudinais*.

Para a estrutura Auto-Regressiva Geral temos que :

$$\Sigma = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & 0 & \dots & 0 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & 0 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Neste caso, estamos assumindo que a partir da ordem igual ou superior a três a correlação é nula. Por outro lado, temos que as correlações de primeira e segunda ordem, respectivamente  $\rho_1$  e  $\rho_2$ , nos dão o grau de associação entre as observações efetuadas numa mesma *unidade experimental* nas condições de avaliação ( $t_1$  e  $t_{1+1}$ ) e ( $t_1$  e  $t_{1+2}$ ). Pela própria estrutura de dados longitudinais temos que, em geral,  $\rho_1$  e  $\rho_2$  são positivos e  $\rho_1 > \rho_2$ . É importante ressaltar que as estruturas apresentadas consideram variância constante ao longo das condições de avaliação ( $\sigma^2$ ),

fato este que não é satisfeito em muitas situações.

A estrutura seguinte é gerada pelo modelo de efeitos aleatórios descrito por Laird e Ware (1982), e é expressa por :

$$\underset{\sim}{\Sigma} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{1}_p & \underset{\sim}{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ \delta_2 & \delta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{1}'_p \\ \underset{\sim}{t}' \end{bmatrix} + \sigma^2 \underset{\sim}{I}_p \quad (2.7)$$

onde os parâmetros  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  e  $\delta_3$  representam as componentes de uma matriz de covariância desconhecida dos efeitos aleatórios e  $\sigma^2$  é a variância do erro. Para esta estrutura temos que a variância ao longo das condições de avaliação não é constante, e, depende do vetor  $\underset{\sim}{t}$ .

No tópico seguinte iremos descrever as propostas de *Planejamentos Mistos*.

## 2.2 - OS PLANEJAMENTOS MISTOS

Nesta seção vamos apresentar sete propostas de *Planejamentos Mistos*. Estes planejamentos, por representarem casos particulares do *Planejamento Longitudinal Puro*, contemplarão a formação de  $g$  grupos de  $n_j$  unidades experimentais

em cada um deles que serão acompanhadas ao longo das *condições de avaliação* escolhidas de acordo com o Planejamento Misto Proposto.

Precisamos agora introduzir uma mudança na notação, pois, necessitamos de dois índices para podermos caracterizar os grupos (  $j = 1, 2, \dots, g$  ) e as *unidades experimentais* que serão alocadas nos mesmos (  $k = 1, 2, \dots, n_j$  ).

Seja agora  $\underset{\sim}{y}_{jk} = ( y_{jkt_1}, y_{jkt_2}, \dots, y_{jkt_p} )'$  o vetor completo se todas as observações fossem efetuadas na  $k$ -ésima *unidade experimental* do  $j$ -ésimo grupo. A partir da escolha da estrutura de *Planejamento Misto* vamos selecionar através da matriz de incidência (  $\underset{\sim}{M}_j$  ) que é composta de zeros ( 0's ) e uns ( 1's ), os componentes de  $\underset{\sim}{y}_{jk}$  que irão pertencer a cada grupo. Deste modo, o vetor das observações efetivamente obtidas no *Planejamento Misto* será representado por :

$$\underset{\sim}{y}_{jk}^* = \underset{\sim}{M}_j \underset{\sim}{y}_{jk}$$

onde,  $j = 1, 2, \dots, g$  e  $k = 1, 2, \dots, n_j$

Sabemos ainda que :

$$E(\underset{\sim}{y}_{jk}^*) = \underset{\sim}{\mu}_j^* = \underset{\sim}{M}_j \underset{\sim}{\mu} \quad \text{e} \quad \text{Var}(\underset{\sim}{y}_{jk}^*) = \underset{\sim}{\Sigma}_j^* = \underset{\sim}{M}_j \underset{\sim}{\Sigma} \underset{\sim}{M}_j'$$

É importante ressaltar que, no *Planejamento Longitudinal Puro*, a matriz de incidência é a própria matriz identidade, ou seja,  $M_{\sim j} = I_{\sim p}$ .

### 2.2.1 - PLANEJAMENTO TRANSVERSAL ( T )

Para esta estrutura de planejamento cada grupo de *unidades experimentais* será observado em uma única *condição de avaliação*. Deste modo, temos que o total de grupos constituídos é igual ao total de *condições de avaliação* (  $g = p$  ).

Por exemplo, se tivermos seis *condições de avaliação*, ( $p=6$ ) teremos seis grupos ( $g=6$ ) e as matrizes de incidência conforme segue :

$M_{\sim 1} = [ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 ]$  para as *unidades experimentais* a serem observadas na *condição de avaliação*  $t_1$ ;

$M_{\sim 2} = [ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 ]$  para as *unidades experimentais* a serem observadas na *condição de avaliação*  $t_2$ ;

·  
·  
·

$M_{\sim 6} = [ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 ]$  para as *unidades experimentais* a serem observadas na *condição de avaliação*  $t_6$ .



## 2.2.2 - PLANEJAMENTO COM DUAS OBSERVAÇÕES CONSECUTIVAS ( DC )

Neste caso o número de grupos constituídos é  $g = p-1$ , sendo que as observações vão ser efetuadas em duas *condições de avaliação* consecutivas (  $t_1$  e  $t_{1+1}$  ).

Se tivermos por exemplo seis *condições de avaliação* ( $p=6$ ), vamos constituir cinco grupos ( $g=5$ ). Desta forma, as respectivas matrizes de incidência vão ser :

$$M_{\sim 1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{para as unidades experimentais a} \\ \text{serem observadas nas condições de} \\ \text{avaliação } t_1 \text{ e } t_2; \end{array}$$

$$M_{\sim 2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{para as unidades experimentais a} \\ \text{serem observadas nas condições de} \\ \text{avaliação } t_2 \text{ e } t_3; \end{array}$$

$$M_{\sim 5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{para as unidades experimentais a} \\ \text{serem observadas nas condições de} \\ \text{avaliação } t_5 \text{ e } t_6. \end{array}$$

### 2.2.3 - PLANEJAMENTO COM TRÊS OBSERVAÇÕES CONSECUTIVAS ( TC )

Para esta situação temos que o número de grupos formados é  $g = p-2$ , com as observações sendo efetuadas em três condições de avaliação consecutivas (  $t_1$ ,  $t_{1+1}$  e  $t_{1+2}$  ).

Se considerarmos um exemplo com seis condições de avaliação ( $p=6$ ) vamos ter quatro grupos ( $g=4$ ). Neste caso, as matrizes de incidência apresentam a seguinte forma :

$$M_{\sim 1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{para as unidades experimentais a serem observadas nas condições de avaliação } t_1, t_2 \text{ e } t_3;$$

$$M_{\sim 2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{para as unidades experimentais a serem observadas nas condições de avaliação } t_2, t_3 \text{ e } t_4;$$

$$M_{\sim 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{para as unidades experimentais a serem observadas nas condições de avaliação } t_4, t_5 \text{ e } t_6.$$

#### 2.2.4 - PLANEJAMENTO PROPOSTO POR RAO E RAO ( RAO )

Para esta proposta de planejamento vamos ter que o total de grupos constituídos é  $g = 4p-5$ , sendo que as *unidades experimentais* vão ser observadas em uma única *condição de avaliação*, em duas *condições de avaliação* consecutivas, em duas *condições de avaliação* alternadas e em três *condições de avaliação* consecutivas ( ver Rao e Rao (1966) ).

Se tivermos por exemplo, seis *condições de avaliação* ( $p=6$ ) vamos ter seis grupos onde cada *unidade experimental* irá gerar uma única observação. Analogamente, teremos cinco grupos onde serão geradas duas observações consecutivas por *unidade experimental*, quatro grupos com a geração de duas observações alternadas por *unidade experimental* e, finalmente, quatro grupos onde serão geradas três observações consecutivas por *unidade experimental*, totalizando dezenove grupos ( $g=19$ ). As matrizes de incidência associadas a esta proposta de planejamento são aquelas 15 das três propostas anteriores acrescidas das seguintes :

$$M_{\sim 16} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{para as } \textit{unidades experimentais} \text{ a serem} \\ \text{observadas nas } \textit{condições de avaliação} \\ t_1 \text{ e } t_3; \end{array}$$

$$M_{\sim 17} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{para as } \textit{unidades experimentais} \text{ a serem} \\ \text{observadas nas } \textit{condições de avaliação} \\ t_2 \text{ e } t_4; \end{array}$$

$$\tilde{M}_{18} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
 para as *unidades experimentais* a serem observadas nas *condições de avaliação*  $t_3$  e  $t_5$ ;

$$\tilde{M}_{19} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
 para as *unidades experimentais* a serem observadas nas *condições de avaliação*  $t_4$  e  $t_6$ .

#### 2.2.5 - PLANEJAMENTO PROPOSTO POR BERGER ( BG )

Para esta situação teremos que o número total de grupos formados ( $g$ ) será um sub-múltiplo do total de *condições de avaliação* ( $p$ ), sendo que cada *unidade experimental* será observada em ( $v$ ) *condições de avaliação* consecutivas e sem superposição, com  $v$  dependendo do valor de  $g$ , ou seja,  $vg = p$  ( ver Berger (1986) ).

Se considerarmos um exemplo com seis *condições de avaliação* ( $p=6$ ), teremos que o número de grupos poderá ser  $g = 2$  ou 3. Neste caso teremos que  $v = 3$  ou 2, respectivamente, sendo que as matrizes de incidência serão as seguintes :

## CASO 1

$$p = 6, g = 2 \text{ e } v = 3$$

$$M_{\sim 1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

para as *unidades experimentais* a serem observadas nas *condições de avaliação*  $t_1$ ,  $t_2$  e  $t_3$ ;

$$M_{\sim 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

para as *unidades experimentais* a serem observadas nas *condições de avaliação*  $t_4$ ,  $t_5$  e  $t_6$ .

## CASO 2

$$p = 6, g = 3 \text{ e } v = 2$$

$$M_{\sim 1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

para as *unidades experimentais* a serem observadas nas *condições de avaliação*  $t_1$  e  $t_2$ ;

$$M_{\sim 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

para as *unidades experimentais* a serem observadas nas *condições de avaliação*  $t_3$  e  $t_4$ ;

$$M_{\sim 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

para as *unidades experimentais* a serem observadas nas *condições de avaliação*  $t_5$  e  $t_6$ .

## 2.2.6 - PLANEJAMENTO PROPOSTO POR MACHIN ( MC )

Para esta situação teremos, que o número total de grupos formados ( $g$ ) será um sub-múltiplo do total de *condições de avaliação* ( $p$ ), sendo que cada *unidade experimental* será observada em ( $v$ ) *condições de avaliação* alternadas, com  $v$  e a alternância dependendo do valor de  $g$ , ou seja,  $vg = p$  ( ver Machin (1975) ).

Com relação ao Planejamento Proposto por Berger, temos que, a partir da definição do total de *condições de avaliação* ( $p$ ), existe uma coincidência quanto ao número de grupos formados ( $g$ ), sendo que a diferença entre ambos está na forma como as observações vão ser coletadas.

Como exemplo poderemos pensar em uma situação com seis *condições de avaliação* ( $p=6$ ) e com o número de grupos  $g = 2$  ou 3. Neste caso teremos, respectivamente, que  $v = 3$  ou 2. Deste modo, as respectivas matrizes de incidência associadas a esta estrutura de planejamento apresentarão as seguintes formas :

### CASO 1

$$p = 6 , g = 2 \text{ e } v = 3$$

$$M_{\sim 1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

para as *unidades experimentais* a serem observadas nas *condições de avaliação*  $t_1$ ,  $t_3$  e  $t_5$ ;

$$M_{\sim 2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

para as *unidades experimentais* a serem observadas nas condições de avaliação  $t_2$ ,  $t_4$  e  $t_6$ .

## CASO 2

$$p = 6, g = 3 \text{ e } v = 2$$

$$M_{\sim 1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

para as *unidades experimentais* a serem observadas nas condições de avaliação  $t_1$  e  $t_4$ ;

$$M_{\sim 2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

para as *unidades experimentais* a serem observadas nas condições de avaliação  $t_2$  e  $t_5$ ;

$$M_{\sim 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

para as *unidades experimentais* a serem observadas nas condições de avaliação  $t_3$  e  $t_6$ .

## 2.2.7 – PLANEJAMENTO A PARTIR DE BLOCOS INCOMPLETOS BALANCEADOS (BIB)

Para esta proposta, temos que cada bloco representa um grupo ( $g$ ), sendo que devemos ter o mesmo número de *condições de avaliação* por grupo ( $v$ ). Todos os pares de *condições de avaliação* devem se repetir o mesmo número de vezes ( $\lambda$ ) no experimento.

Se considerarmos um exemplo com seis *condições de avaliação* ( $p=6$ ), temos que um possível arranjo do BIB poderá ter dez grupos ( $g=10$ ). Neste caso vamos ter três *condições de avaliação* por grupo ( $v=3$ ), sendo que cada par de *condição de avaliação* se repete duas vezes ( $\lambda=2$ ) ao longo dos dez grupos constituídos.

A seguir, vamos apresentar a estrutura observacional apropriada para este arranjo do BIB conforme Cochran (1957). Para outros exemplos do BIB consultar o mesmo autor.



grupos	condições de avaliação					
	t <sub>1</sub>	t <sub>2</sub>	t <sub>3</sub>	t <sub>4</sub>	t <sub>5</sub>	t <sub>6</sub>
1	x	x			x	
2	x	x				x
3	x		x	x		
4	x		x			x
5	x			x	x	
6		x	x	x		
7		x	x		x	
8		x		x		x
9			x		x	x
10				x	x	x

Associada a esta estrutura, vamos agora construir as respectivas matrizes de incidência para cada grupo.

$$M_{\sim 1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{para as unidades experimentais a serem observadas nas condições de avaliação } t_1, t_2 \text{ e } t_5;$$

$$M_{\sim 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{para as unidades experimentais a serem observadas nas condições de avaliação } t_1, t_2 \text{ e } t_6;$$

$$\tilde{M}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

para as unidades experimentais a serem observadas nas condições de avaliação  $t_1$ ,  $t_3$  e  $t_4$ ;

$$\tilde{M}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

para as unidades experimentais a serem observadas nas condições de avaliação  $t_1$ ,  $t_3$  e  $t_6$ ;

$$\tilde{M}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

para as unidades experimentais a serem observadas nas condições de avaliação  $t_1$ ,  $t_4$  e  $t_5$ ;

$$\tilde{M}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

para as unidades experimentais a serem observadas nas condições de avaliação  $t_2$ ,  $t_3$  e  $t_4$ ;

$$\tilde{M}_7 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

para as unidades experimentais a serem observadas nas condições de avaliação  $t_2$ ,  $t_3$  e  $t_5$ ;

$$\tilde{M}_8 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

para as unidades experimentais a serem observadas nas condições de avaliação  $t_2$ ,  $t_4$  e  $t_6$ ;

$$\tilde{M}_9 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

para as unidades experimentais a serem observadas nas condições de avaliação  $t_3$ ,  $t_5$  e  $t_6$ ;

$$\tilde{M}_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

para as unidades experimentais a serem observadas nas condições de avaliação  $t_4$ ,  $t_5$  e  $t_6$ .

A seguir vamos falar da avaliação dos planejamentos, através de uma medida de eficiência.

### 2.3 - EFICIÊNCIA DOS PLANEJAMENTOS

Conforme citado anteriormente, vamos considerar que o comportamento da variável de interesse ao longo das *condições de avaliação* pode ser descrito, em média, por uma função linear simples, ou seja :

$$\underset{\sim}{\mu} = \underset{\sim}{X} \underset{\sim}{\beta}$$

$$\text{onde} \quad \underset{\sim}{X} = \left[ \underset{\sim}{1} \quad \underset{\sim}{t} \right] \quad \text{e} \quad \underset{\sim}{\beta} = ( \underset{\sim}{\beta}_0 \quad \underset{\sim}{\beta}_1 )'$$

A matriz  $\underset{\sim}{X}$  é representada por um vetor de uns de dimensão p (  $\underset{\sim}{1}_p$  ), e, pelo vetor  $\underset{\sim}{t}$  conforme expressão (2.1). Quanto a matriz  $\underset{\sim}{\beta}$ , temos que  $\underset{\sim}{\beta}_0$  representa o coeficiente linear, enquanto  $\underset{\sim}{\beta}_1$  representa a inclinação da reta a ser ajustada.

O desempenho dos planejamentos será medido a partir da matriz de covariância do estimador do vetor de parâmetros  $\underset{\sim}{\beta}$ .

Apesar do nosso interesse estar concentrado no vetor  $\beta$ , devemos frisar que a matriz de covariância  $\Sigma$  desempenha um papel bastante importante no processo de estimação de  $\beta$ .

Supondo que os dados seguem uma distribuição normal multivariada, e, assumindo que  $\Sigma$  é conhecido temos então que a matriz de covariância do estimador de máxima verossimilhança  $\hat{\beta}$  é da seguinte forma :

$$\text{Var}(\hat{\beta}) = \left\{ X' \left[ \sum_{j=1}^g n_j M_j' (M_j \Sigma M_j')^{-1} M_j \right] X \right\}^{-1} \quad (2.8)$$

(ver Apêndice)

Neste ponto iremos definir a medida de eficiência a ser utilizada na comparação dos planejamentos.

Primeiramente é importante ressaltar que, na classe dos estimadores lineares não tendenciosos, o mais eficiente é o que apresenta a menor variabilidade. Sabemos entretanto que, para um vetor de parâmetros, existem diferentes formas de se trabalhar com a matriz de covariância.

Fedorov (1972) descreve alguns critérios que podem ser utilizados na comparação dos estimadores. O traço de uma matriz, seu determinante, assim como o maior autovalor, representam quantidades que servem para medir a eficiência.

Em *Estudos Longitudinais*, como pode existir uma estrutura de correlação entre as observações, vamos utilizar como medida o determinante da matriz. Tal medida é chamada de variância generalizada e é representada por :

$$| \text{Var}(\hat{\beta}_{\sim}) | = | \{ X'_{\sim} [ \sum_{j=1}^g n_j M'_{\sim j} ( M_{\sim j} \Sigma_{\sim j} M'_{\sim j} )^{-1} M_{\sim j} ] X_{\sim} \}^{-1} | \quad (2.9)$$

Deste modo a eficiência relativa (E) do *Planejamento Misto* em relação ao *Planejamento Longitudinal Puro* é definida pela razão das variâncias generalizadas, sendo que as mesmas estão indexadas respectivamente por  $\hat{\beta}_{\sim M}$  e  $\hat{\beta}_{\sim L}$ , e serão definidas no tópico seguinte.

$$E = \frac{| \text{Var}(\hat{\beta}_{\sim L}) |}{| \text{Var}(\hat{\beta}_{\sim M}) |} \quad (2.10)$$

## 2.4 - MEDIDA DE EFICIÊNCIA PARA OS PLANEJAMENTOS PROPOSTOS

Nesta seção iremos encontrar as expressões que caracterizam a variância generalizada para o *Planejamento Longitudinal Puro* e para o *Planejamento Misto*, e posteriormente, definir a medida de eficiência relativa para cada Planejamento Proposto com relação ao *Planejamento Longitudinal Puro*.

Devemos ainda destacar que nos *Planejamentos Mistos* estamos interessados em gerar as mesmas  $np$  observações obtidas através do *Planejamento Longitudinal Puro*.

#### 2.4.1 - O PLANEJAMENTO LONGITUDINAL

Para esta estrutura de planejamento vamos ter um único grupo ( $g=1$ ) de *unidades experimentais* ( $n_j$ ) sendo acompanhadas nas  $p$  *condições de avaliação* programadas para a realização do estudo. Como o nosso objetivo é gerar  $np$  observações temos que  $n_j = n$ . Neste caso, a matriz  $M_j$  é a matriz identidade de ordem  $p$ , ( $M_j = I_p$ ). Logo, utilizando a expressão (2.9) temos que a variância generalizada de  $\hat{\beta}_L$  é :

$$| \text{Var} (\hat{\beta}_L) | = | \frac{1}{n} ( X' \Sigma^{-1} X )^{-1} | \quad (2.11)$$

#### 2.4.2 - O PLANEJAMENTO MISTO

Como visto anteriormente, iremos constituir  $g$  grupos

de  $n_j$  *unidades experimentais* em cada um, que serão observadas em  $p_j$  *condições de avaliação*. Desta forma, teremos que o total de *unidades experimentais* será dado por  $\sum_{j=1}^g n_j$ , enquanto que o total de observações será dado por  $\sum_{j=1}^g n_j p_j$ .

Se fizermos  $n_j = r$ , ou seja, tomarmos todos os grupos com  $r$  *unidades experimentais* e utilizarmos (2.9), teremos que a variância generalizada de  $\hat{\beta}_{\sim M}$  será dada por :

$$|\text{Var}(\hat{\beta}_{\sim M})| = \left| \left\{ \underset{\sim}{X}' \left[ \sum_{j=1}^g r \underset{\sim}{M}_j' (\underset{\sim}{M}_j \underset{\sim}{\Sigma} \underset{\sim}{M}_j')^{-1} \underset{\sim}{M}_j \right] \underset{\sim}{X} \right\}^{-1} \right| \quad (2.12)$$

Substituindo agora (2.11) e (2.12) em (2.10) teremos que nossa medida de eficiência é :

$$E = \frac{r^2 \left| \underset{\sim}{X}' \left[ \sum_{j=1}^g \underset{\sim}{M}_j' (\underset{\sim}{M}_j \underset{\sim}{\Sigma} \underset{\sim}{M}_j')^{-1} \underset{\sim}{M}_j \right] \underset{\sim}{X} \right|}{n^2 \left| \underset{\sim}{X}' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{X} \right|} \quad (2.13)$$

Na expressão anterior observamos que  $r$  e  $n$  estão elevados a potência dois. Isto se deve ao fato de que os determinantes obtidos são de ordem 2.

#### 2.4.2.1 - O PLANEJAMENTO TRANSVERSAL

Seguindo o que foi apresentado em (2.2.1), temos que o número de grupos é igual ao número de *condições de avaliação* ( $g=p$ ), e que cada *unidade experimental* é observada em uma única *condição de avaliação*. Como vamos alocar  $r$  *unidades experimentais* em cada grupo teremos que :

$$r = n$$

Substituindo o resultado anterior em (2.13) encontraremos então :

$$E_T = \frac{\left| \begin{array}{c} X' \left[ \sum_{j=1}^p M_j' (M_j \Sigma M_j')^{-1} M_j \right] X \\ \sim \quad \sim \quad \sim \quad \sim \quad \sim \quad \sim \quad \sim \quad \sim \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{c} X' \Sigma^{-1} X \\ \sim \quad \sim \quad \sim \end{array} \right|} \quad (2.14)$$

#### 2.4.2.2 - O PLANEJAMENTO COM DUAS OBSERVAÇÕES CONSECUTIVAS

Conforme exposto em (2.2.2), vamos ter que o número de grupos é  $g = p-1$  e o número de *condições de avaliação* por grupo é dois. Como em cada grupo serão alocadas  $r$  *unidades experimentais* iremos então gerar  $2(p-1)r$  observações.



$$\text{Fazendo } 2(p-1)r = np, \quad \Rightarrow \quad r = \frac{np}{2(p-1)}$$

Desta forma, utilizando (2.13) teremos que :

$$E_{DC} = \frac{p^2}{4(p-1)^2} \times \frac{\left| \begin{array}{c} X' \\ \sim \end{array} \left[ \sum_{j=1}^{p-1} \begin{array}{c} M_j' \\ \sim \end{array} (M_j \Sigma M_j')^{-1} M_j \right] \begin{array}{c} X \\ \sim \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{c} X' \\ \sim \end{array} \Sigma^{-1} \begin{array}{c} X \\ \sim \end{array} \right|} \quad (2.15)$$

#### 2.4.2.3 - O PLANEJAMENTO COM TRÊS OBSERVAÇÕES CONSECUTIVAS

Vamos inicialmente distribuir  $r$  unidades *experimentais* em cada grupo. Utilizando (2.2.3), teremos  $p-2$  grupos com 3 observações por *unidade experimental*, perfazendo um total de  $3r(p-2)$  observações.

$$\text{Fazendo } 3r(p-2) = np, \quad \Rightarrow \quad r = \frac{np}{3(p-2)}$$

Logo, através de (2.13) poderemos expressar a eficiência por :

$$E_{TC} = \frac{p^2}{9(p-2)^2} \times \frac{\left| \begin{array}{c} X' \\ \sim \end{array} \left[ \sum_{j=1}^{p-2} \begin{array}{c} M_j' \\ \sim \end{array} \right] \left( \begin{array}{c} M_j \\ \sim \end{array} \Sigma \begin{array}{c} M_j' \\ \sim \end{array} \right)^{-1} \begin{array}{c} M_j \\ \sim \end{array} \right] \begin{array}{c} X \\ \sim \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{c} X' \\ \sim \end{array} \Sigma^{-1} \begin{array}{c} X \\ \sim \end{array} \right|} \quad (2.16)$$

#### 2.4.2.4 - O PLANEJAMENTO PROPOSTO POR RAO E RAO

Este planejamento contempla a seguinte estrutura observacional :

- a) p grupos serão observados em uma única *condição de avaliação*;
- b) (p-1) grupos serão observados em duas *condições de avaliação* consecutivas;
- c) (p-2) grupos serão observados em duas *condições de avaliação* alternadas; e
- d) (p-2) grupos serão observados em três *condições de avaliação* consecutivas.

Primeiramente, para a distribuição das *unidades experimentais* por grupo, foi considerado que os grupos com uma única observação deveriam possuir menos unidades. Quanto aos grupos que geram duas observações por *unidade experimental*, os mesmos devem ter igual número de unidades. Finalmente, o maior

número de *unidades experimentais* foi alocado para os grupos de três observações consecutivas.

Deste modo, considerando o número de condições de avaliação em cada grupo, foi feita a alocação de  $r$ ,  $\frac{r}{2}$ ,  $\frac{r}{2}$  e  $\frac{r}{3}$  *unidades experimentais* aos grupos com três observações consecutivas, duas observações consecutivas, duas observações alternadas e uma única observação, respectivamente.

Teremos então que a variância generalizada de  $\hat{\beta}_{\sim M}$  será obtida através da expressão abaixo, onde  $M_{\sim 1J}$  representa a matriz de incidência associada a cada um dos grupos formados, ou seja,  $M_{\sim 1J}$ ,  $M_{\sim 2J}$ ,  $M_{\sim 3J}$  e  $M_{\sim 4J}$  representam as matrizes de incidência associadas respectivamente aos grupos com  $\frac{r}{3}$ ,  $\frac{r}{2}$ ,  $\frac{r}{2}$  e  $r$  *unidades experimentais*.

$$\begin{aligned}
 | \text{var} (\hat{\beta}_{\sim M}) | &= r^2 | X' \{ \frac{1}{3} \sum_{j=1}^p M_{\sim 1J}' (M_{\sim 1J} \Sigma M_{\sim 1J}')^{-1} M_{\sim 1J} + \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{p-1} M_{\sim 2J}' (M_{\sim 2J} \Sigma M_{\sim 2J}')^{-1} M_{\sim 2J} + \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{p-2} M_{\sim 3J}' (M_{\sim 3J} \Sigma M_{\sim 3J}')^{-1} M_{\sim 3J} + \\
 &+ \sum_{j=1}^{p-2} M_{\sim 4J}' (M_{\sim 4J} \Sigma M_{\sim 4J}')^{-1} M_{\sim 4J} \} X | \\
 &\quad (2.17)
 \end{aligned}$$

No exemplo apresentado em (2.2.4) temos que as matrizes  $M_{\sim 1j}$ ,  $M_{\sim 2j}$  e  $M_{\sim 4j}$  são análogas as matrizes dos planejamentos descritos em (2.2.1), (2.2.2) e (2.2.3), respectivamente. Quanto as matrizes  $M_{\sim 3j}$ , temos que as mesmas são semelhantes as apresentadas em (2.2.4).

Quanto ao número de observações, sabemos que o mesmo será igual a  $\frac{r(16p-27)}{3}$ .

$$\text{Fazendo } \frac{r(16p-27)}{3} = np, \Rightarrow r = \frac{3np}{(16p-27)}$$

Desta forma, utilizando em (2.13) como numerador a expressão (2.17), verificamos que, a eficiência do planejamento proposto por Rao e Rao (1966) em relação ao *Planejamento Longitudinal*, terá como fator de correção  $\frac{9p^2}{(16p-27)^2}$ . Chamaremos esta proposta de RA01.

Um segundo critério adotado para a alocação das *unidades experimentais* foi o de distribuir mais unidades aos grupos que geram menos observações. Deste modo, considerando o número de *condições de avaliação* por grupo foi feita a alocação de  $r$ ,  $\frac{r}{2}$ ,  $\frac{r}{2}$  e  $\frac{r}{3}$  *unidades experimentais* aos grupos geradores de uma única observação, de duas observações consecutivas, de duas

observações alternadas e de três observações consecutivas, respectivamente.

Deste modo, a variância generalizada de  $\hat{\beta}_{\sim M}$  será dada por :

$$\begin{aligned}
 | \text{var} (\hat{\beta}_{\sim M}) | &= r^2 | X'_{\sim} \{ \sum_{j=1}^p M'_{1j} (M_{1j} \Sigma M'_{1j})^{-1} M_{1j} + \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{p-1} M'_{2j} (M_{2j} \Sigma M'_{2j})^{-1} M_{2j} + \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{p-2} M'_{3j} (M_{3j} \Sigma M'_{3j})^{-1} M_{3j} + \\
 &+ \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{p-2} M'_{4j} (M_{4j} \Sigma M'_{4j})^{-1} M_{4j} \} X_{\sim} | \quad (2.18)
 \end{aligned}$$

Quanto ao número de observações, sabemos que o mesmo será dado por  $r(4p-5)$ .

$$\text{Fazendo } r(4p-5) = np, \quad \Rightarrow \quad r = \frac{np}{(4p-5)}$$

Desta forma, utilizando em (2.13) como numerador a expressão (2.18), verificamos que a eficiência do planejamento proposto por Rao e Rao (1966) em relação ao *Planejamento*

*Longitudinal*, terá como fator de correção  $\frac{p^2}{(4p-5)^2}$ . Chamaremos esta proposta de RAO2.

#### 2.4.2.5 - O PLANEJAMENTO PROPOSTO POR BERGER

Conforme descrição feita em (2.2.5), temos que  $g$  grupos vão ser formados, sendo que em cada um deles iremos alocar  $r$  *unidades experimentais* sendo que cada uma vai ser observada em  $v$  *condições de avaliação*. Desta forma teremos que :

$$grv = np$$

$$\text{Fazendo então, } grv = np \quad \Rightarrow \quad r = \frac{np}{gv}.$$

Deste modo, utilizando (2.13), temos que :

$$E_{BG} = \frac{p^2}{g^2 v^2} \times \frac{\left| \begin{array}{c} X' \\ \sim \end{array} \right| \left| \sum_{j=1}^g \begin{array}{c} M_j' \\ \sim \end{array} (M_j \Sigma M_j')^{-1} \begin{array}{c} M_j \\ \sim \end{array} \right| \begin{array}{c} X \\ \sim \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{c} X' \\ \sim \end{array} \Sigma^{-1} \begin{array}{c} X \\ \sim \end{array} \right|} \quad (2.19)$$

#### 2.4.2.6 - O PLANEJAMENTO PROPOSTO POR MACHIN

Conforme descrição feita em (2.2.6), temos que  $g$  grupos vão ser formados. Em cada um deles iremos alocar  $r$  *unidades experimentais* sendo que cada unidade será acompanhada em  $v$  *condições de avaliação* de tal forma que :

$$grv = np$$

$$\text{Fazendo então, } grv = np \quad \Rightarrow \quad r = \frac{np}{gv} .$$

Deste modo, utilizando (2.13), temos que :

$$E_{MC} = \frac{p^2}{g^2 v^2} \times \frac{\left| \begin{array}{c} X' \\ \sim \end{array} \left[ \sum_{j=1}^g \begin{array}{c} M_j' \\ \sim \end{array} \left( \begin{array}{c} M_j \Sigma M_j' \\ \sim \sim \sim \end{array} \right)^{-1} \begin{array}{c} M_j \\ \sim \end{array} \right] \begin{array}{c} X \\ \sim \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{c} X' \\ \sim \end{array} \Sigma^{-1} \begin{array}{c} X \\ \sim \end{array} \right|} \quad (2.20)$$

#### 2.4.2.7 - O PLANEJAMENTO SEGUNDO A ESTRUTURA DE BLOCOS INCOMPLETOS BALANCEADOS

O número de observações geradas por este planejamento é  $\frac{rp\lambda(p-1)}{(v-1)}$ , onde  $r$  representa o número de *unidades experimentais* por grupo,  $p$  o total de *condições de avaliação* programadas para a realização do estudo,  $\lambda$  o número de vezes que cada par de *condições de avaliação* se repete no experimento e  $v$  o número de *condições de avaliação* por grupo.

$$\text{Fazendo } \frac{rp\lambda(p-1)}{(v-1)} = np \quad \Rightarrow \quad r = \frac{n(v-1)}{\lambda(p-1)}.$$

Substituindo  $r$  em (2.13), teremos que :

$$E_{BIB} = \frac{(v-1)^2}{\lambda^2(p-1)^2} \times \frac{\left| \begin{array}{c} X' \\ \sim \end{array} \left[ \sum_{j=1}^p \begin{array}{c} M_j' \\ \sim \end{array} (M_j \Sigma M_j')^{-1} M_j \right] X \right|}{\left| \begin{array}{c} X' \\ \sim \end{array} \Sigma^{-1} \begin{array}{c} X \\ \sim \end{array} \right|} \quad (2.21)$$

Uma observação importante é que as matrizes  $M_j$  são diferentes para os diferentes Planejamentos Propostos. Por exemplo, as expressões (2.19) e (2.20) são diferentes pois as matrizes  $M_j$  não são as mesmas nas duas expressões.



## **CAPÍTULO 3**

### **DESCRIÇÃO DO PROCESSO DE SIMULAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS**

Neste capítulo nosso objetivo é descrever o processo de simulação, assim como analisar os resultados obtidos.

#### **3.1 - DESCRIÇÃO DO PROCESSO DE SIMULAÇÃO**

Na simulação vamos combinar as diferentes propostas de planejamentos com as diferentes estruturas das matrizes de covariância apresentadas no capítulo anterior. Para a obtenção dos resultados foram elaborados programas de computador com os recursos do módulo CM do Software Científico - SOC ( ver NTIA (1989) ).

### 3.1.1 - AS CONDIÇÕES DE AVALIAÇÃO

O número total de *condições de avaliação* ( $p$ ) programadas para o desenvolvimento do estudo será considerado entre três e oito ( $3 \leq p \leq 8$ ) tendo em vista que o nosso interesse está relacionado com o modelo linear simples e também que, em geral, as técnicas de análise são apropriadas para  $p$  não muito grande. Por outro lado, estudaremos os casos em que as *condições de avaliação* são igualmente espaçadas e assim, sem perda de generalidade, podemos usar  $\underset{\sim}{t} = (1, 2, \dots, p)'$  (ver capítulo 4).

### 3.1.2 - AS ESTRUTURAS DE COVARIÂNCIA

Da própria natureza dos dados gerados em *Estudos Longitudinais* temos que as observações são, em geral, positivamente correlacionadas. Este fato justifica plenamente os comentários que serão feitos a seguir para cada matriz de covariância utilizada.

Para as estruturas de matrizes de covariância Uniforme e AR(1) vamos estudar os diferentes tipos de

planejamentos quando a correlação ( $\rho$ ) assume os seguintes valores :  $\{ 0,1, 0,2, . . . , 0,9 \}$ . Para a matriz de covariância, que apresenta a estrutura Auto-Regressiva Geral, estamos assumindo que a correlação de primeira ordem ( $\rho_1$ ) é maior do que a correlação de segunda ordem ( $\rho_2$ ), sendo que a partir da ordem três a correlação é nula. Nesta simulação, consideramos ambas as correlações variando de 0,1 até 0,9 com incremento de 0,1. Fixado o valor de  $\rho_1$  em cada ponto do intervalo anterior, variamos então o valor de  $\rho_2$  em todo intervalo de forma análoga, com a restrição de  $\rho_1 > \rho_2$ .

Para estes três modelos de matrizes de covariância o cálculo da eficiência não será afetado pelo parâmetro  $\sigma^2$ , pois, estamos admitindo que a variância é a mesma para cada conjunto de observações efetuadas nas diferentes condições de avaliação implicando desta forma no cancelamento do parâmetro  $\sigma^2$  quando fazemos o quociente dos determinantes.

Para o modelo de efeitos aleatórios consideramos 16 situações onde os parâmetros vão assumir os seguintes valores :

Parâmetros			
$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_3$	$\sigma^2$
0,1	0,02	0,01	0,5
1,0	-0,02	0,1	2,0

Neste caso, o parâmetro  $\sigma^2$  representa a variância do erro.

Para todos os modelos de matrizes de covariância é necessário verificar se as matrizes construídas  $(\Sigma)$ , para os diferentes valores de correlação, são positivas definidas. No caso da estrutura Uniforme, ( ver Mardia (1979) ) a matriz obtida é positiva definida se  $-1/(p-1) \leq \rho \leq 1$ , onde p representa o total de condições de avaliação programadas para a realização do estudo. Para as demais estruturas foram elaborados programas para verificar se para uma suposta matriz de covariância  $(\Sigma)$  os autovalores são positivos, pois, se este resultado for verdadeiro teremos então que a matriz considerada é positiva definida. Precisamos também verificar se  $X' \Sigma^{-1} X$  é positiva definida, assim como as respectivas partições de  $\Sigma^{-1}$  obtidas no *Planejamento Misto*.

É importante comentar que o tamanho da amostra (n) não interfere no cálculo da eficiência, pois, no *Planejamento Longitudinal Puro* as n unidades experimentais vão ser acompanhadas em p condições de avaliação gerando np observações. Por outro lado, no *Planejamento Misto* vamos gerar as mesmas np observações através da alocação de r unidades experimentais ou de uma fração delas (caso RAO1 e RAO2) nos diferentes grupos que serão acompanhados em diferentes subconjuntos de condições de avaliação. Como r é função de n podemos cancelar n na expressão (2.13).

A seguir iremos apresentar os resultados obtidos através de uma série de figuras e tabelas que serão comentadas.

### **3.2 - APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS**

Um primeiro aspecto que nos chama a atenção está relacionado com o modelo ajustado. É fundamental que o mesmo seja adequado para descrever os dados pois, a partir da sua escolha é que iremos estudar o comportamento da eficiência para as diferentes propostas de planejamentos.

#### **3.2.1 - EFICIÊNCIA DO PLANEJAMENTO MISTO EM RELAÇÃO AO PLANEJAMENTO LONGITUDINAL PURO**

Nas figuras apresentadas a seguir, para as estruturas de covariância Uniforme e AR(1), temos no eixo horizontal  $\rho$ .

Para  $p = 6$  ou  $8$  temos que MC1 e MC2, BG1 e BG2 representam, respectivamente, os Planejamentos Propostos por Machin e por Berger sendo que MC1 e BG1 apresentam um número menor de grupos do que MC2 e BG2.

Vamos também definir o ponto de corte como sendo o valor de  $p$  onde o *Planejamento Transversal* (T) deixa de ser o mais eficiente.

### 3.2.1.1 - ESTRUTURA UNIFORME

Quando o número de *condições de avaliação* é par no intervalo  $[3, 8]$ , temos que para esta estrutura de covariância, o ponto de corte para a correlação se encontra no intervalo  $(0,3, 0,4]$ , conforme podemos observar nas Figuras 3.2, 3.4 e 3.6. Entretanto, quando os valores de  $p$  superam este número, constatamos que o Planejamento Proposto por Machin, que contempla a formação de grupos com duas *condições de avaliação* em cada um deles, torna-se o mais eficiente (MC para  $p = 4$  e MC2 para  $p = 6$  e  $8$ ). Podemos justificar este resultado pelo fato do modelo matemático adotado ser uma reta. Do ponto de vista geométrico, temos que no Planejamento Proposto por Machin as observações são efetuadas de forma alternada e não consecutivas sendo que, este procedimento, pode produzir melhores estimativas dos parâmetros da reta, principalmente, da inclinação, quando da ocorrência de possíveis erros na coleta dos dados. Na comparação do *Planejamento Transversal* (T) com o *Planejamento Longitudinal Puro*, para  $p = 6$  ou  $8$  temos que os resultados encontrados coincidem com os obtidos por Berger (1986).

Para  $p = 3$ , temos que os Planejamentos RAO1 e RAO2 se tornam mais eficientes do que o *Planejamento Transversal* (T) para valores de  $\rho$  acima do ponto de corte que se encontra no intervalo  $(0,3 , 0,4]$  , conforme Figura 3.1. É interessante observar que RAO1 e RAO2 são sempre mais eficientes do que o *Planejamento Longitudinal Puro*. Os Planejamentos Propostos por Machin e Berger, assim como o BIB, não estão definidos para este valor de  $p$ .

Quando  $p = 5$  ou  $7$  através das Figuras 3.3 e 3.5, verificamos que o ponto de corte para a correlação ( $\rho$ ) pertence ao intervalo  $(0,6 , 0,7]$ . Entretanto, temos que o BIB passa a ser o planejamento mais eficiente quando  $\rho$  está acima do referido ponto. Este fato servirá também para justificar o que foi dito anteriormente acerca do Planejamento Proposto por Machin, visto que a forma com que os dados são obtidos no BIB é alternada. Para estes valores de  $p$  os Planejamentos Propostos por Machin e Berger não estão definidos.

Fig 3.1 : Eficiencia para  $p=3$

"1"=DC, "5"=RAD1, "6"=RAD2 e "0"=I

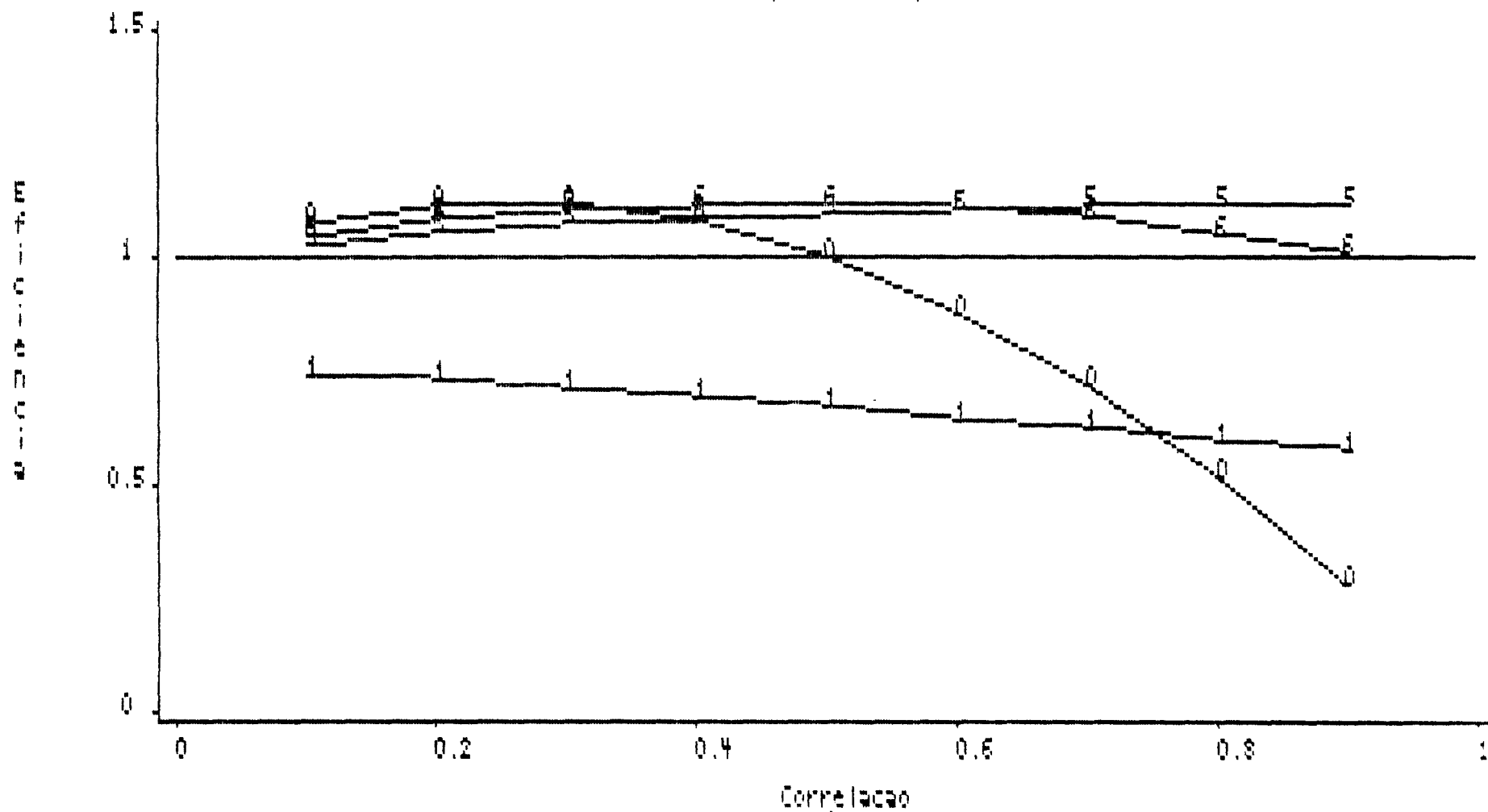




Fig 3.2 : Eficiencia para  $p=4$   
 "1"=OC, "2"=TC, "3"=MC, "5"=RAD1, "6"=RAD2, "7"=SIB, "8"=BG e "0"=I

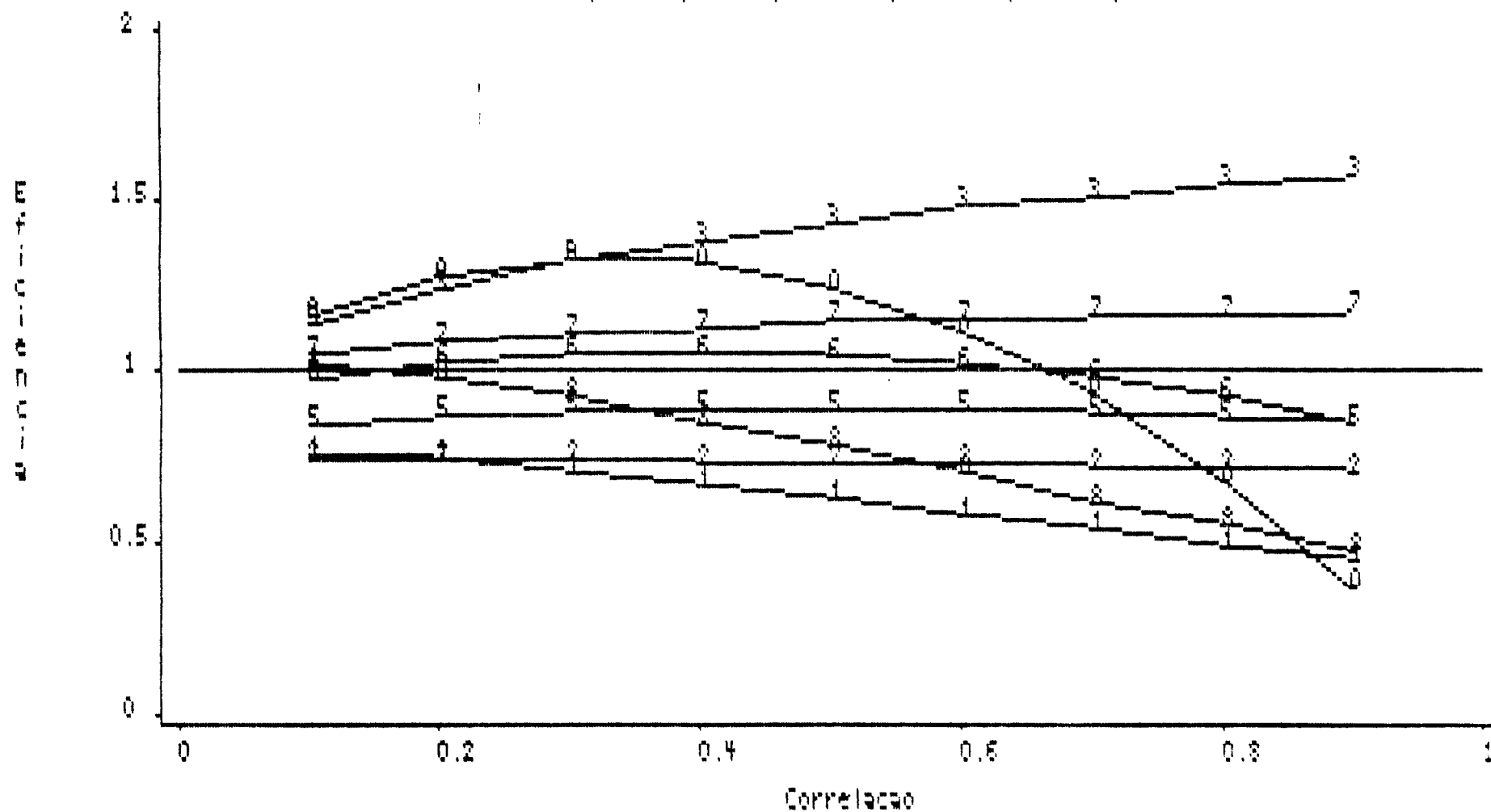


Fig 3.3 : Eficiencia para  $p=5$   
 "1"=DC, "2"=IC, "5"=RAD1, "6"=RAD2, "7"=BIB e "0"=I

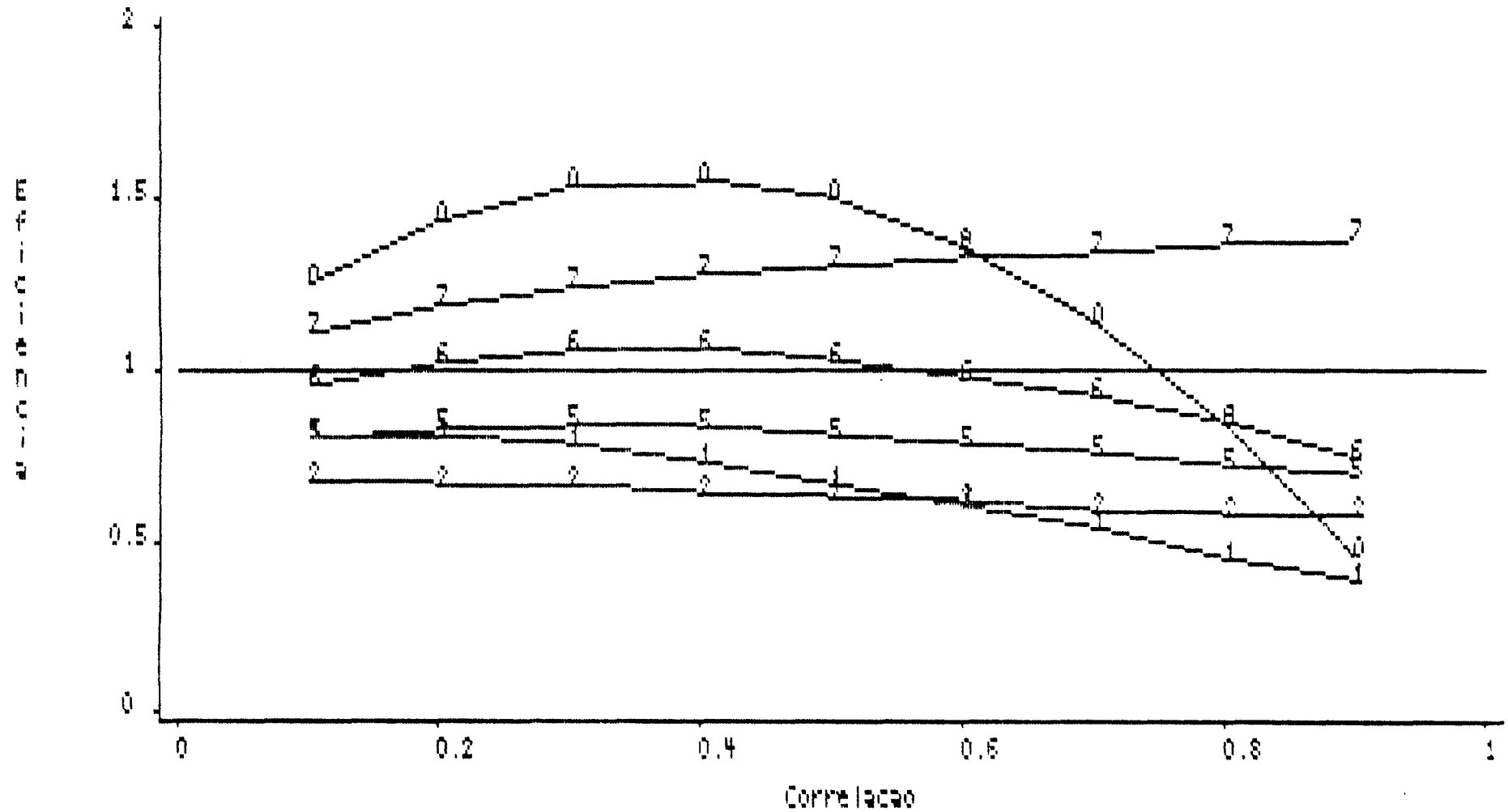


Fig 3.4 : Eficiencia para  $p=6$

"1"=DC, "3"=HC1, "4"=HC2, "5"=RAD1, "6"=RAD2, "7"=BIB, "8"=B61, "9"=B62, "10"=T

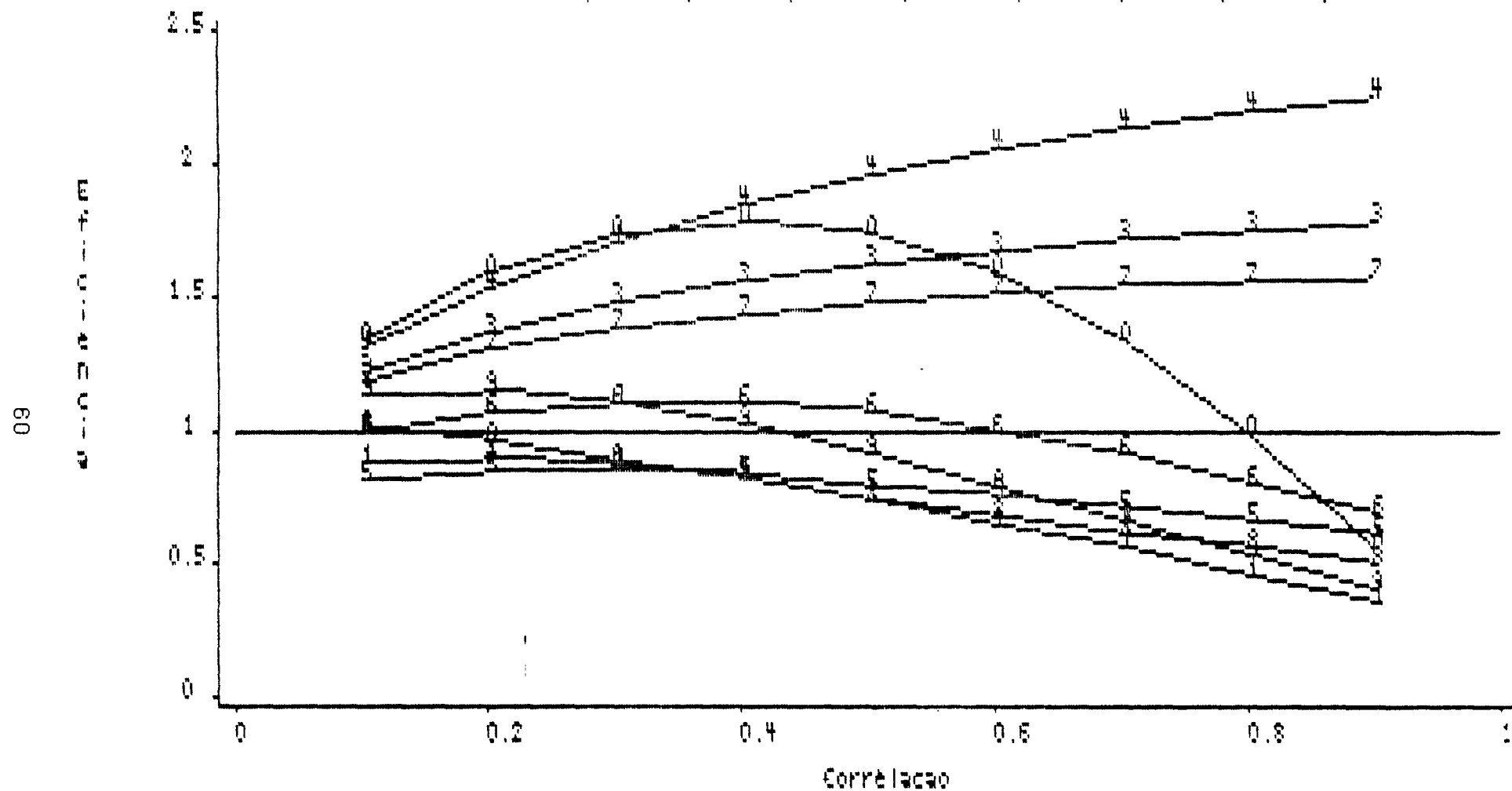


Fig 3.5 : Eficiencia para  $p=7$   
 "1"=OC, "2"=IC, "5"=RAD1, "6"=RAD2, "7"=BIB e "0"=I

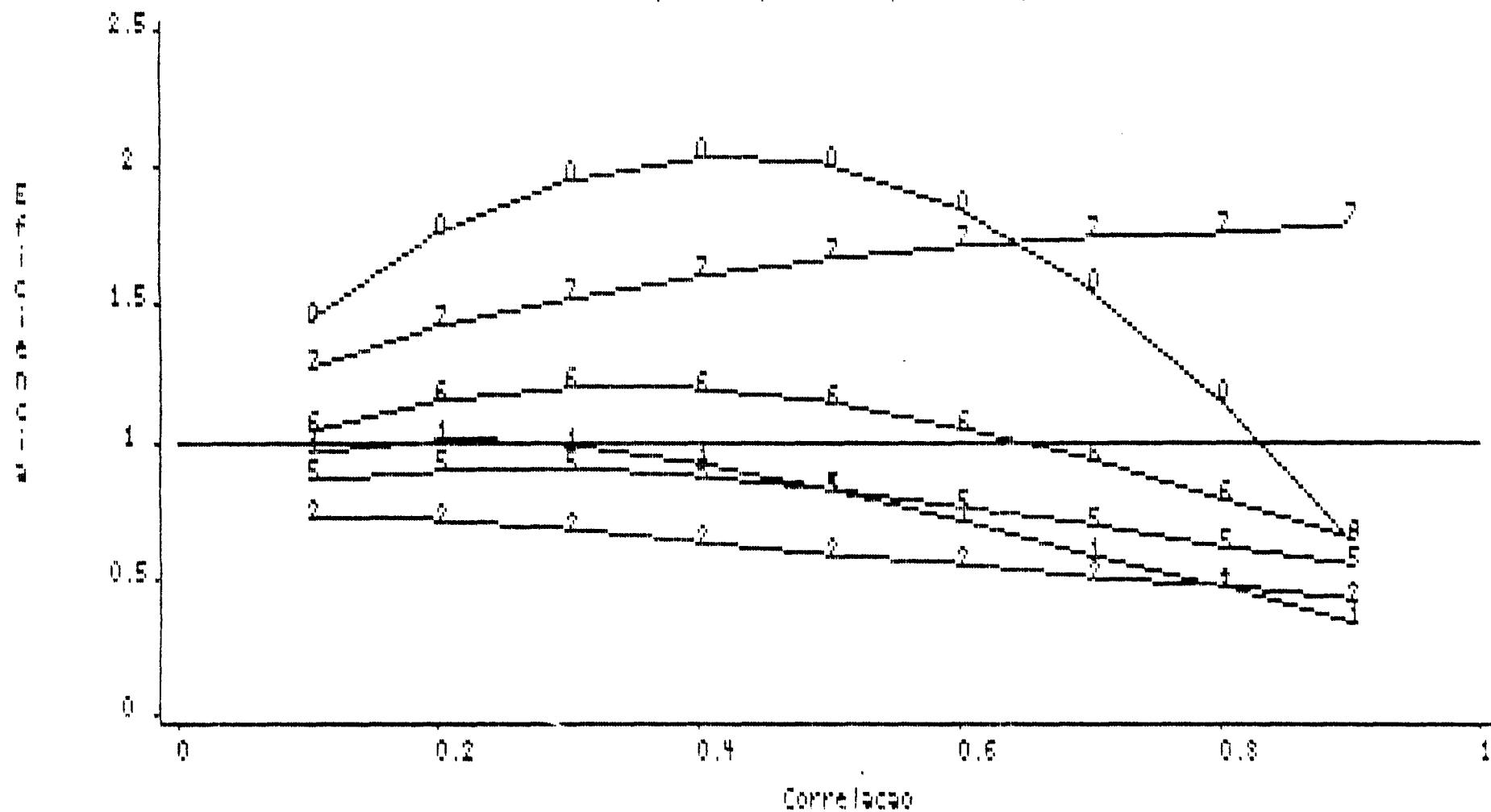
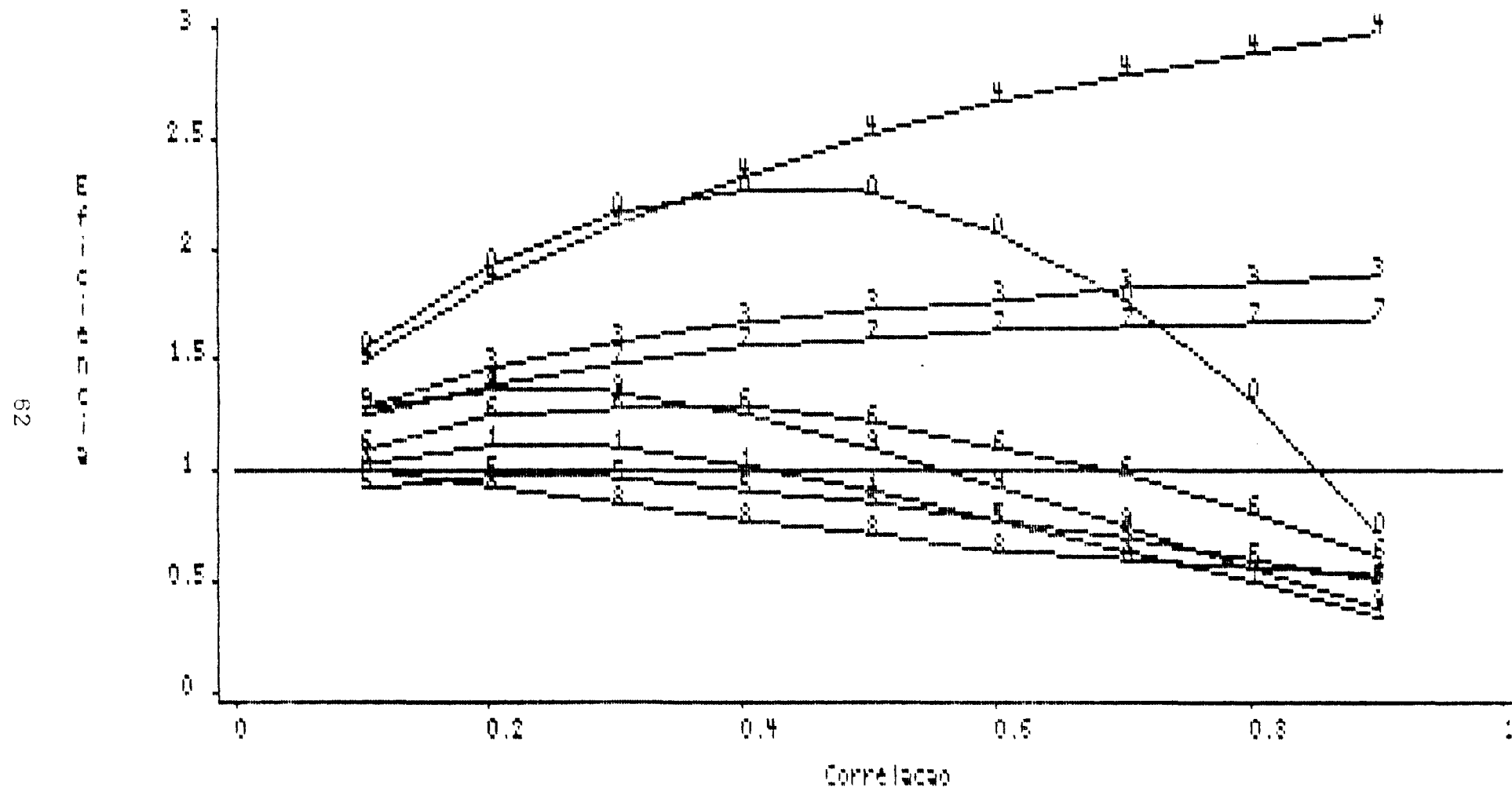


Fig 3.6 : Eficiencia para  $p=8$

"1"=DC, "3"=HC1, "4"=HC2, "5"=RAD1, "6"=RAD2, "7"=BIB, "8"=BG1, "9"=BG2, "10"=T



Para  $p \geq 4$ , nas situações onde os Planejamentos Propostos por Machin (MC, MC1 e MC2) e o BIB estão definidos, temos que eles são sempre mais eficientes do que o *Planejamento Longitudinal Puro*. Entretanto, o mesmo não acontece com o *Planejamento Transversal* (T) que apresenta em todas as situações uma trajetória inicial de crescimento seguida por um processo de queda até se tornar menos eficiente do que o *Planejamento Longitudinal Puro*.

Em resumo para esta estrutura de covariância, podemos apresentar a tabela seguinte que descreve o comportamento dos planejamentos em termos de eficiência sendo que  $a_1$  e  $a_2$  representam os pontos de cortes que pertencem respectivamente, aos intervalos  $[0,3, 0,4)$  e  $[0,6, 0,7)$ .

Tabela 3.1 : Eficiência para Estrutura Uniforme

p	Mais Eficiente		
	$\rho \leq a_1$	$a_1 \leq \rho \leq a_2$	$\rho \geq a_2$
3	T	RA02	RA01
4	T	MC	MC
6	T	MC2	MC2
8	T	MC2	MC2
	$\rho \leq a_2$		$\rho \geq a_2$
5	T		BIB
7	T		BIB

### 3.2.1.2 - ESTRUTURA AR(1)

Através das Figuras 3.8, 3.10 e 3.12 temos que os Planejamentos Propostos por Machin (MC e MC2) passam a ser os mais eficientes somente para valores de  $p$  acima do ponto de corte que neste caso se desloca para o intervalo  $(0,5 , 0,6]$  quando  $p = 4$ . Abaixo do ponto de corte, o *Planejamento Transversal* (T) e o Planejamento Proposto por Machin apresentam aproximadamente a mesma eficiência. O mesmo ocorre quando  $p = 6$  ou  $8$ , só que nestes casos os pontos de corte estão, respectivamente, nos intervalos  $(0,6 , 0,7]$  e  $(0,7 , 0,8]$ . Quando comparamos o *Planejamento Transversal* (T) com o *Planejamento Longitudinal Puro* verificamos que os resultados obtidos por Berger (1986) também se confirmam para esta estrutura quando  $p = 6$  ou  $8$ .

Considerando agora as situações onde  $p$  assume valores ímpares (Figuras 3.7, 3.9 e 3.11) temos que o *Planejamento Transversal* (T) é o mais eficiente para  $p = 7$ . Quando  $p = 3$  e  $5$  temos que o Planejamento RAO2 é o mais eficiente para valores acima dos pontos de corte que se encontram, respectivamente, nos intervalos  $(0,5 , 0,6]$  e  $(0,8 , 0,9]$ . Abaixo destes pontos, o *Planejamento Transversal* (T) é o mais eficiente. Para estes valores de  $p$ , os Planejamentos Propostos por Machin e Berger não estão definidos. Quanto ao BIB, o mesmo não é definido para  $p=3$ .

"1"=02, "5"=RAD1, "6"=RAD2 & "0"=1

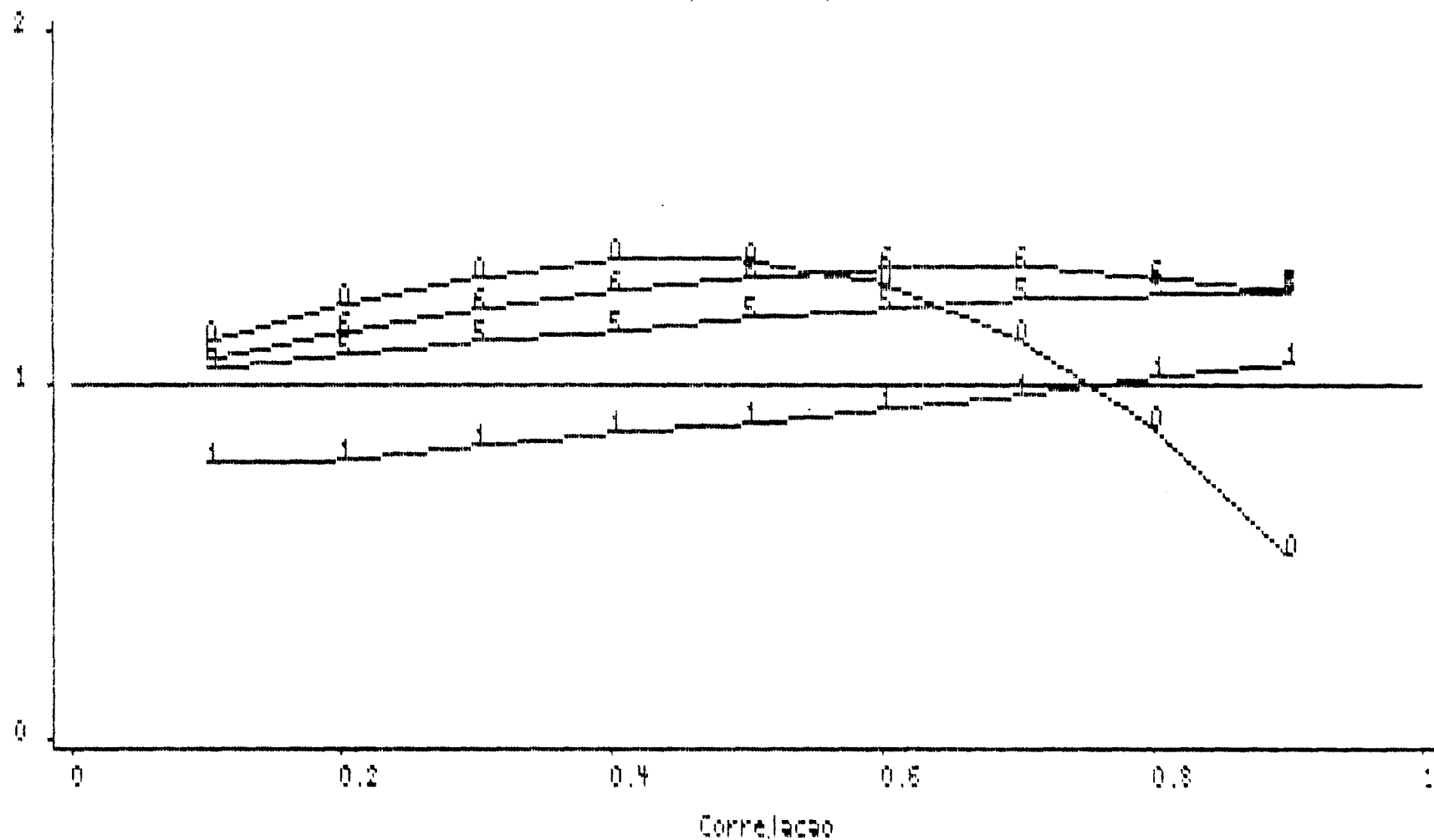




Fig 3.8 : Eficiencia para  $p=4$

"1"=DC, "2"=TC, "3"=HC, "5"=RAD1, "6"=RAD2, "7"=BIB, "8"=EG e "0"=I

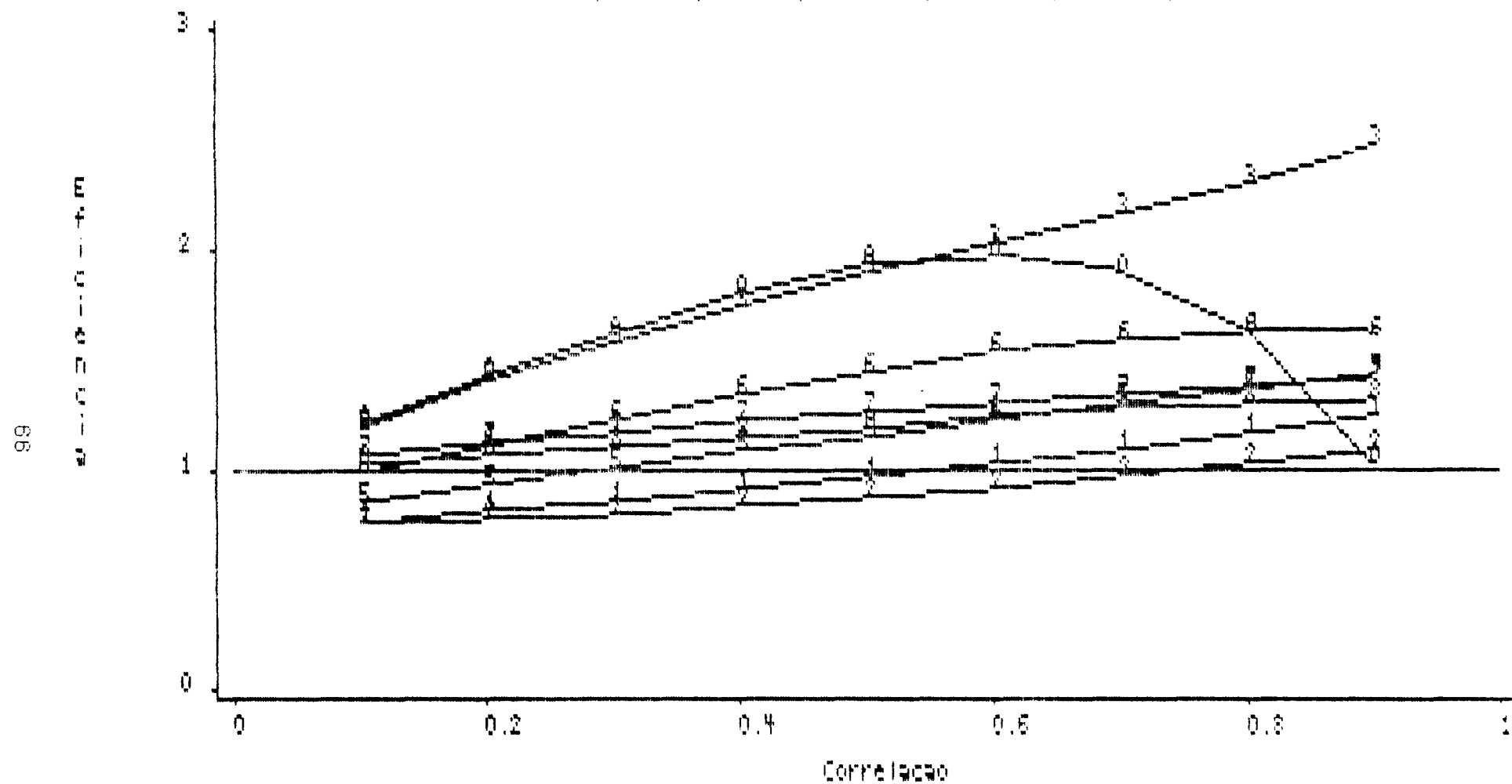


Fig 3.9 : Eficiencia para  $p=5$   
 $\theta_1=DC$ ,  $\theta_2=IC$ ,  $\theta_5=RAD1$ ,  $\theta_6=RAD2$ ,  $\theta_7=8IB$  e  $\theta_0=I$

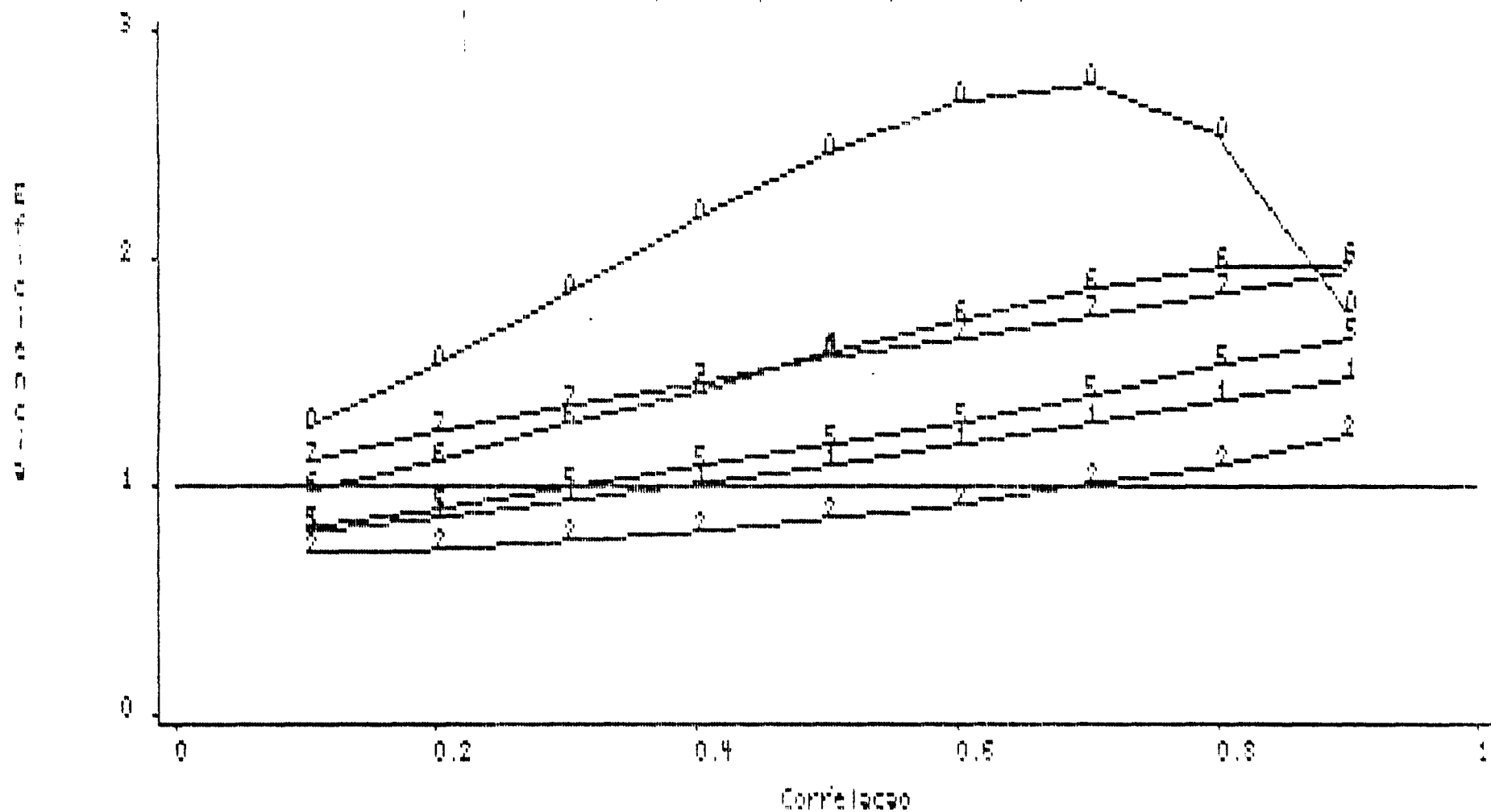


Fig 3.10 : Eficiencia para  $p=6$   
 "1"=OC, "3"=HC1, "4"=HC2, "5"=RA01, "6"=RA02, "7"=EIB, "8"=EG1, "9"=EG2, "10"= T

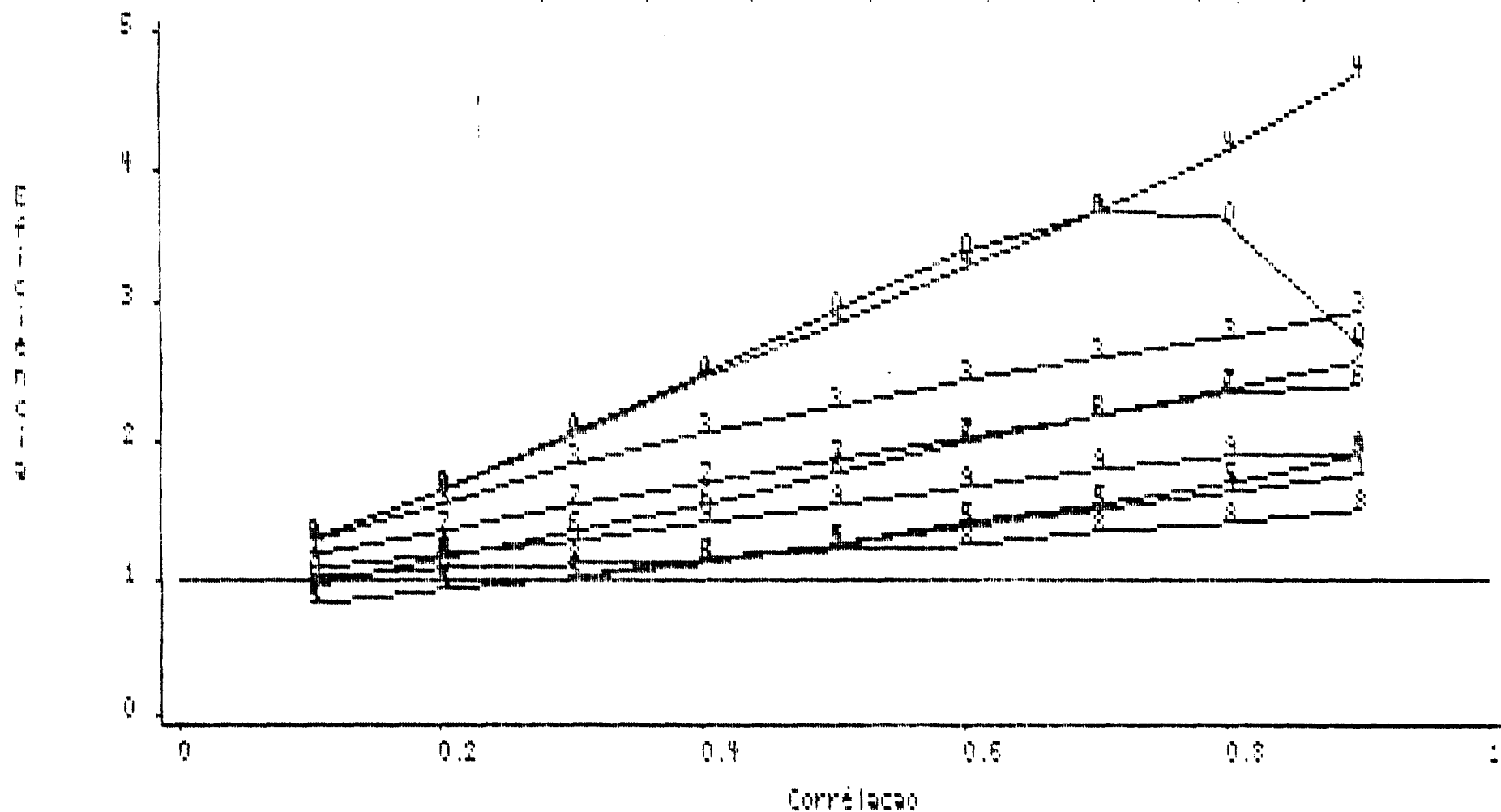


Fig 3.11 : Eficiencia para  $p=7$   
 "1"=DC, "2"=TC, "5"=RAD1, "6"=RAD2, "7"=BIB e "0"=1

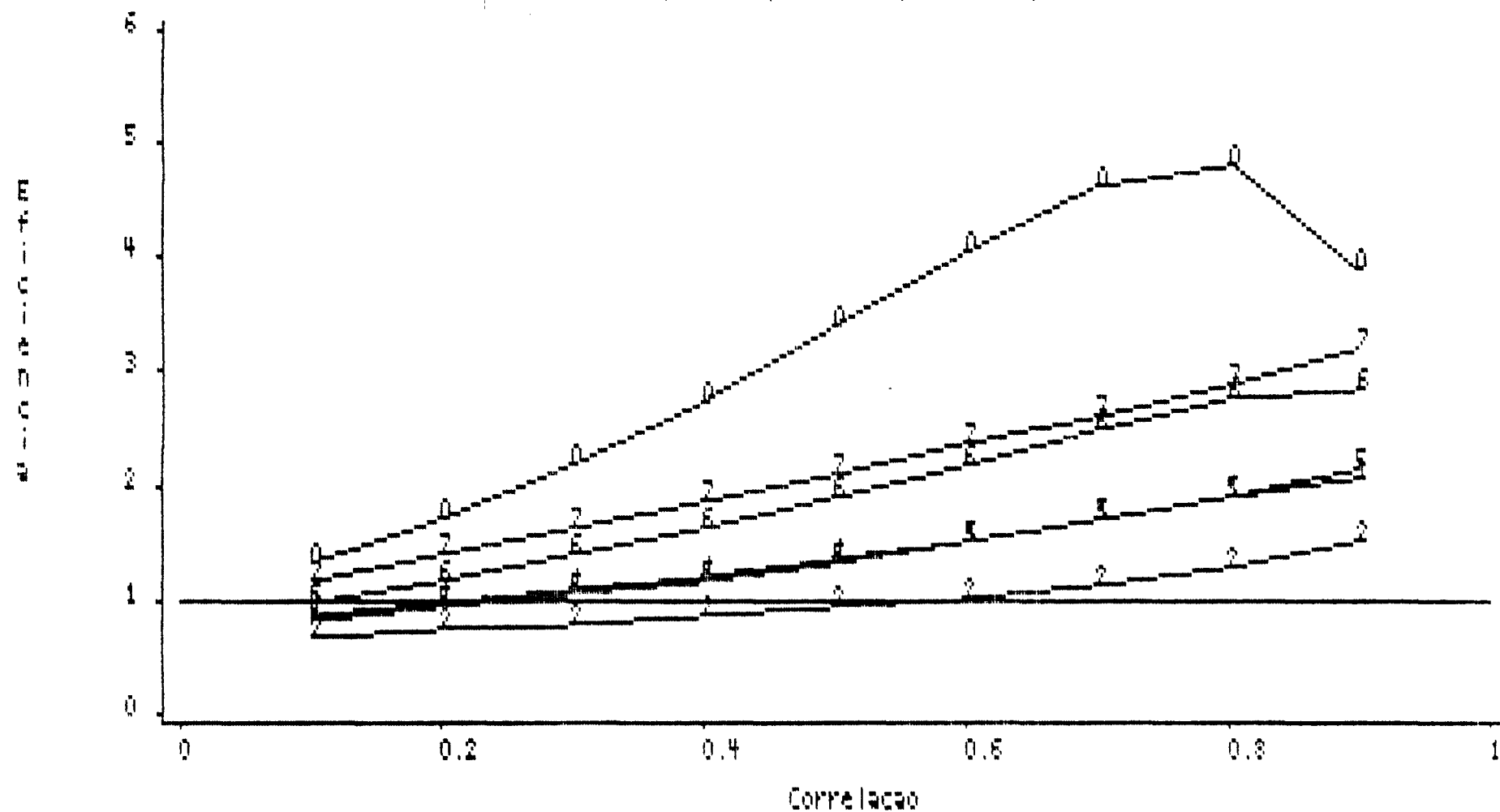
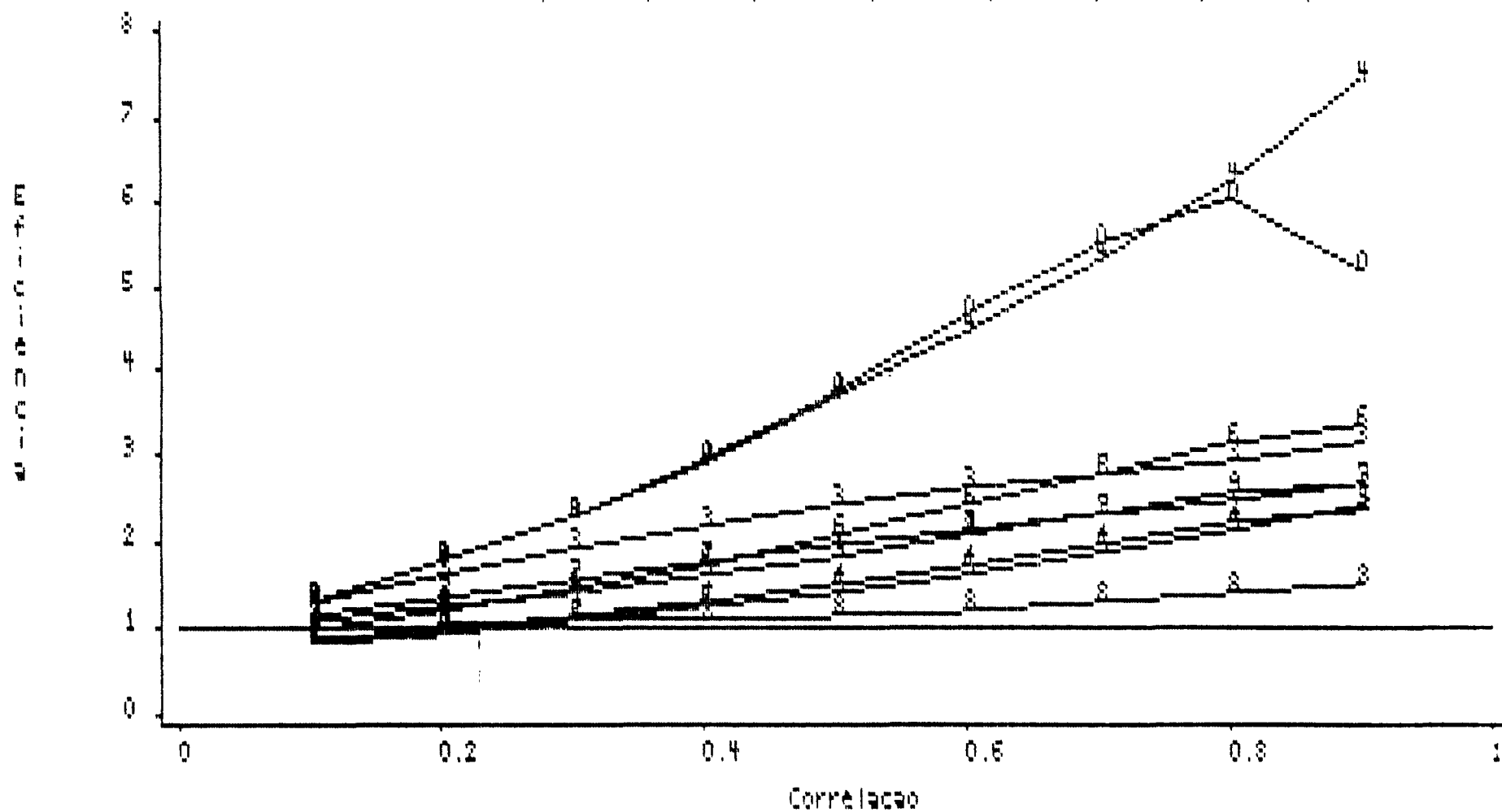


Fig 3.12 : Eficiencia para  $p=8$   
 "1"=DC, "3"=MC1, "4"=MC2, "5"=RAD1, "6"=RAD2, "7"=8IB, "8"=8G1, "9"=8G2, "10"=T



Outra constatação interessante é que para a estrutura de covariância AR(1) os *Planejamentos Transversal (T)* , Machin (MC, MC1 e MC2), Berger (BG, BG1 e BG2) e BIB são sempre mais eficientes do que o *Planejamento Longitudinal Puro* com exceção de  $p = 3$ , pois, neste caso a partir do ponto de corte que se encontra no intervalo  $(0,7 , 0,8]$  , o *Planejamento Longitudinal Puro* passa a ser mais eficiente do que o *Planejamento Transversal (T)* sendo que os planejamentos mencionados anteriormente não estão definidos quando  $p$  assume este valor.

Sejam  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  e  $b_4$  os pontos de corte, respectivamente, nos intervalos  $[0,5 , 0,6)$ ,  $[0,6 , 0,7)$ ,  $[0,7 , 0,8)$  e  $[0,8 , 0,9)$ . Através da tabela seguinte podemos ter uma visão geral do comportamento dos planejamentos quando consideramos esta estrutura de covariância.

Tabela 3.2 : Eficiência para Estrutura AR(1)

p	Mais Eficiente		
	$\rho \leq b_1$	$b_1 \leq \rho \leq b_4$	$\rho \geq b_4$
3	T	RA02	RA01
	$\rho \leq b_1$	$\rho \geq b_1$	
4	T	MC	
	$\rho \leq b_4$	$\rho \geq b_4$	
5	T	RA02	
	$\rho \leq b_2$	$\rho \geq b_2$	
6	T	MC2	
7	T		
	$\rho \leq b_3$	$\rho \geq b_3$	
8	T	MC2	

### 3.2.1.3 - ESTRUTURA AUTO-REGRESSIVA GERAL

Para esta estrutura vamos apresentar os resultados através de tabelas e figuras, sendo que nos valores mostrados abaixo as matrizes de covariância não são positivas definidas. Nas figuras iremos representar no título e no eixo horizontal,

respectivamente, as correlações de primeira e segunda ordem ( $\rho_1$  e  $\rho_2$ ) abreviadas por Ro1 e Ro2.

Tabela 3.3 : Valores de  $p$ ,  $\rho_1$  e  $\rho_2$  que não geram matrizes positivas definidas

$p$	$\rho_1$	$\rho_2$
3	0,9	[0,1 , 0,7)
	0,8	[0,1 , 0,3)
4	0,9	[0,1 , 0,9)
	0,8	[0,1 , 0,4) ou (0,5 , 0,8)
	0,7	[0,1 , 0,2)
5	0,9 ou 0,8	[0,1 , 0,9)
	0,7	[0,1 , 0,2) ou (0,5 , 0,7)
6	0,9 ou 0,8	[0,1 , 0,9)
	0,7	[0,1 , 0,2) ou (0,5 , 0,7)
7	0,9 ou 0,8	[0,1 , 0,9)
	0,7	[0,1 , 0,3) ou (0,4 , 0,7)
	0,6	(0,4 , 0,6)
8	0,9 ou 0,8	[0,1 , 0,9)
	0,7	[0,1 , 0,3) ou (0,3 , 0,7)
	0,6	(0,4 , 0,6)



Tabela 3.4 : Eficiência para  $p = 3$ 

$Ro_1$	0,9		0,4			0,3		0,2
$Ro_2$	0,7	0,8	0,1	0,2	0,3	0,1	0,2	0,1
T	0,72	0,54	1,40	1,32	1,21	1,31	1,22	1,20
DC	1,50	1,12	0,90	0,84	0,77	0,83	0,78	0,78
RA01	1,37	1,29	1,17	1,15	1,12	1,12	1,10	1,08
RA02	1,43	1,28	1,30	1,25	1,19	1,22	1,17	1,13

Observando a tabela acima, constatamos que o *Planejamento Transversal* (T) é o mais eficiente quando  $Ro_1 \leq 0,4$ . Entretanto, quando  $Ro_1 = 0,9$  o mesmo não ocorre sendo que o *Planejamento Longitudinal Puro* é inclusive mais eficiente do que o *Planejamento Transversal* (T). Para os demais valores de  $Ro_1$  ( $0,5 \leq Ro_1 \leq 0,8$ ) vamos apresentar os resultados através das Figuras 3.13, 3.14, 3.15 e 3.16.

A Fig. 3.14 nos mostra que o *Planejamento* RA02 é o mais eficiente. Por outro lado, observando a Fig. 3.13, constatamos que o *Planejamento* RA02 passa a ser o mais eficiente acima de um ponto que pertence ao intervalo  $(0,3, 0,4]$ , sendo que abaixo do mesmo o *Planejamento Longitudinal Puro* torna-se o mais eficiente. Nas Figs. 3.15 e 3.16 temos que RA02 passa a ser o mais eficiente a partir dos pontos de corte que se encontram, respectivamente, nos intervalos  $(0,2, 0,3]$  e  $(0,3, 0,4]$ . Abaixo destes pontos o *Planejamento Transversal* (T) é o mais eficiente.

Fig 3.13 : Eficiencia para  $p=3$  e  $Ro_1=0.8$ 

"1"=DC, "5"=RAD1, "6"=RAD2 e "0"=1

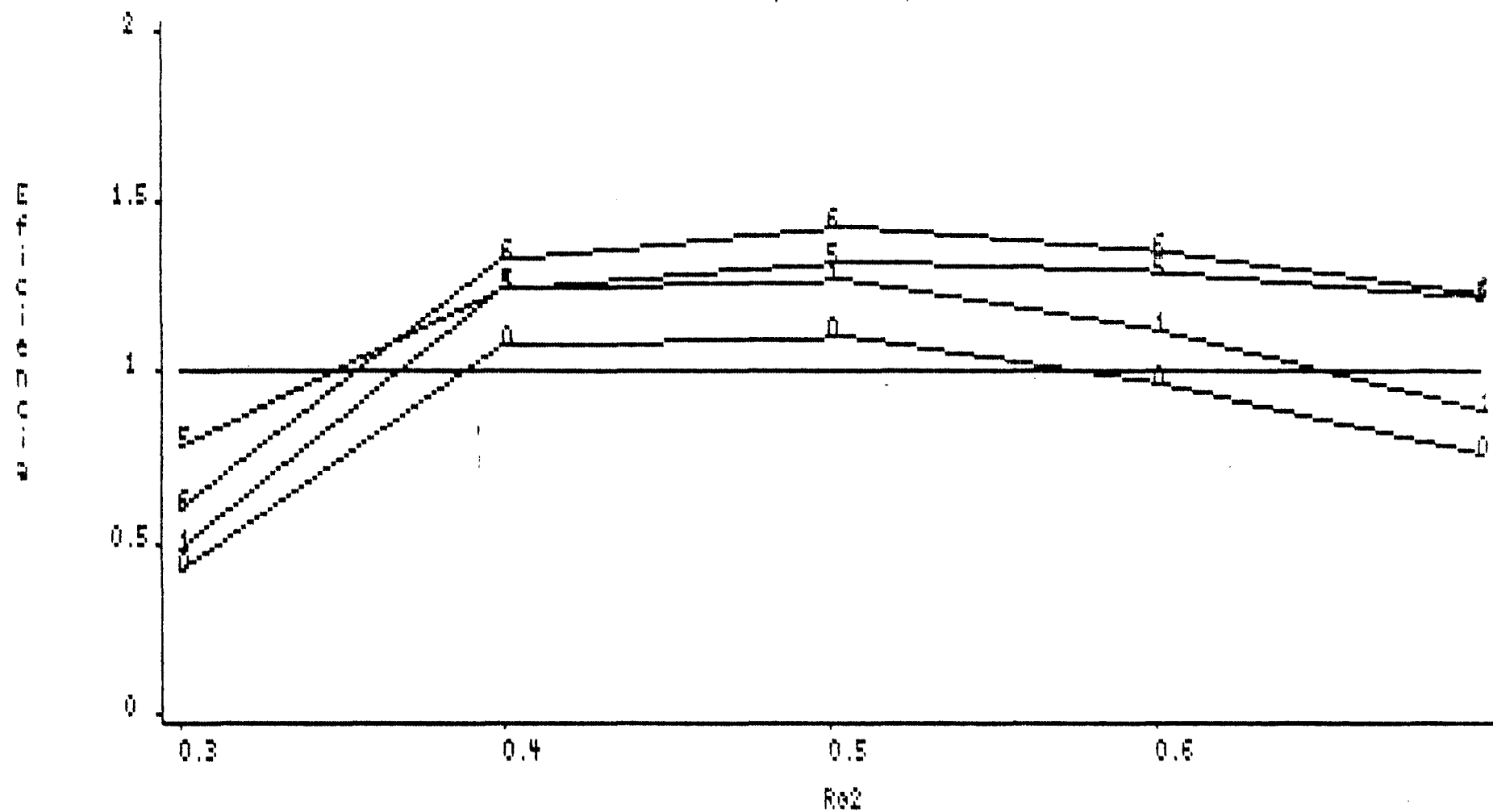


Fig 3.14 : Eficiencia para  $p=3$  e  $Ro_1=0.7$ 

"1"=DC, "5"=RAD1, "6"=RAD2 e "0"=1

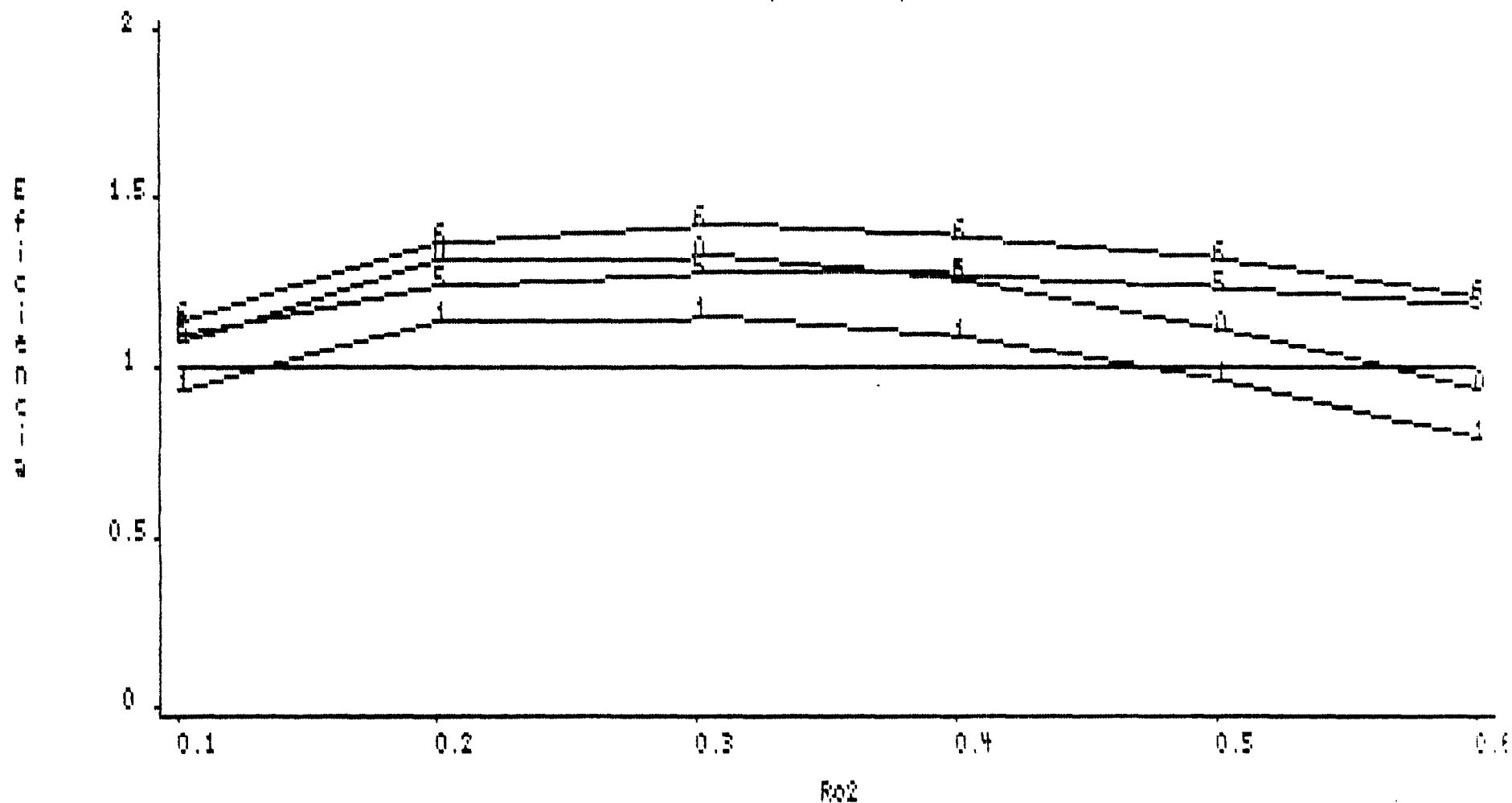


Fig 3.15 : Eficiencia para  $p=3$  e  $Ro_1=0.6$

"1"=DC, "5"=RAD1, "6"=RAD2 e "0"=7

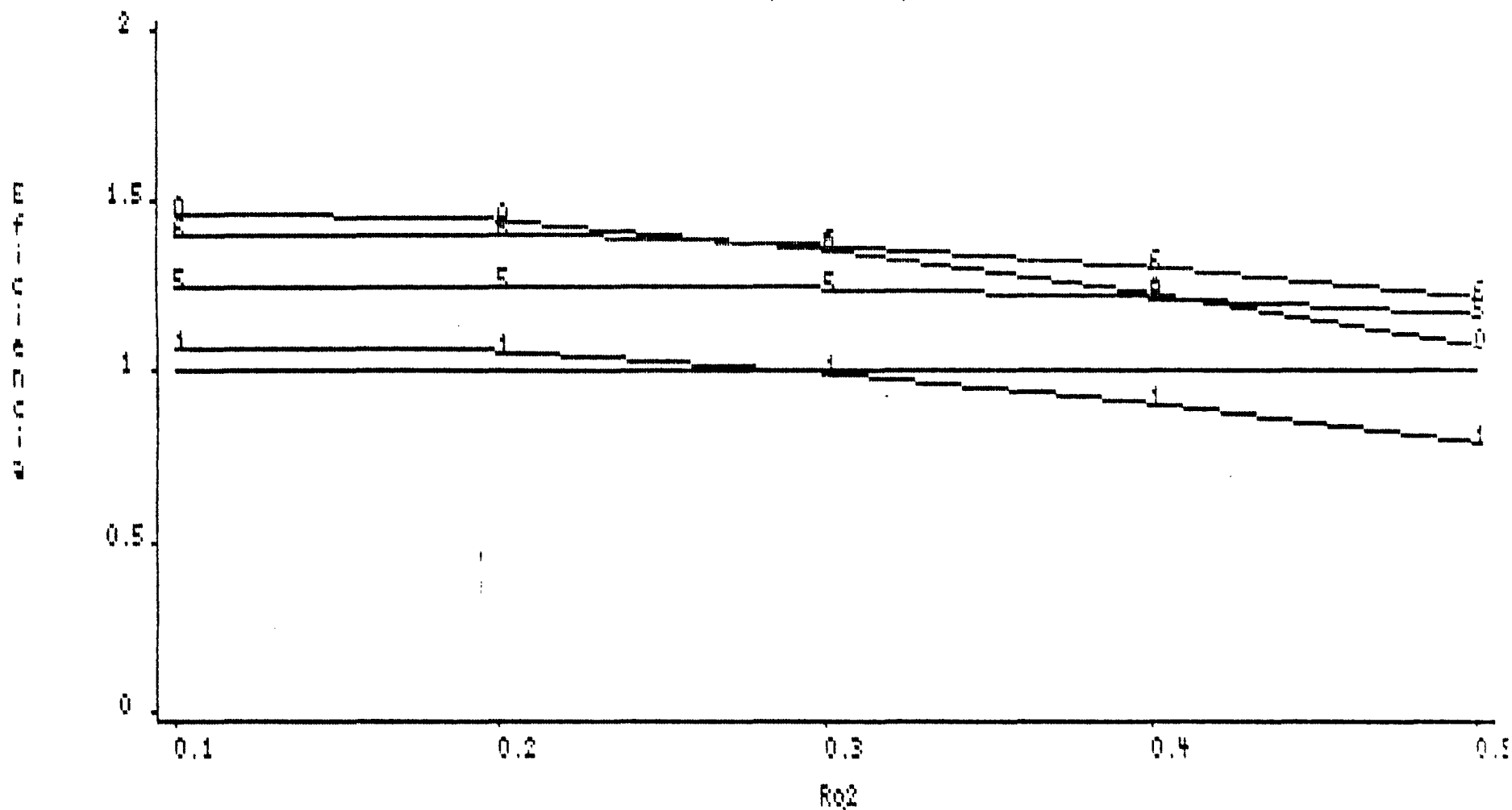


Fig 3.16 : Eficiencia para  $p=3$  e  $Ro_1=0.5$

"1"=DC, "5"=RAD1, "6"=RAD2 e "0"=1

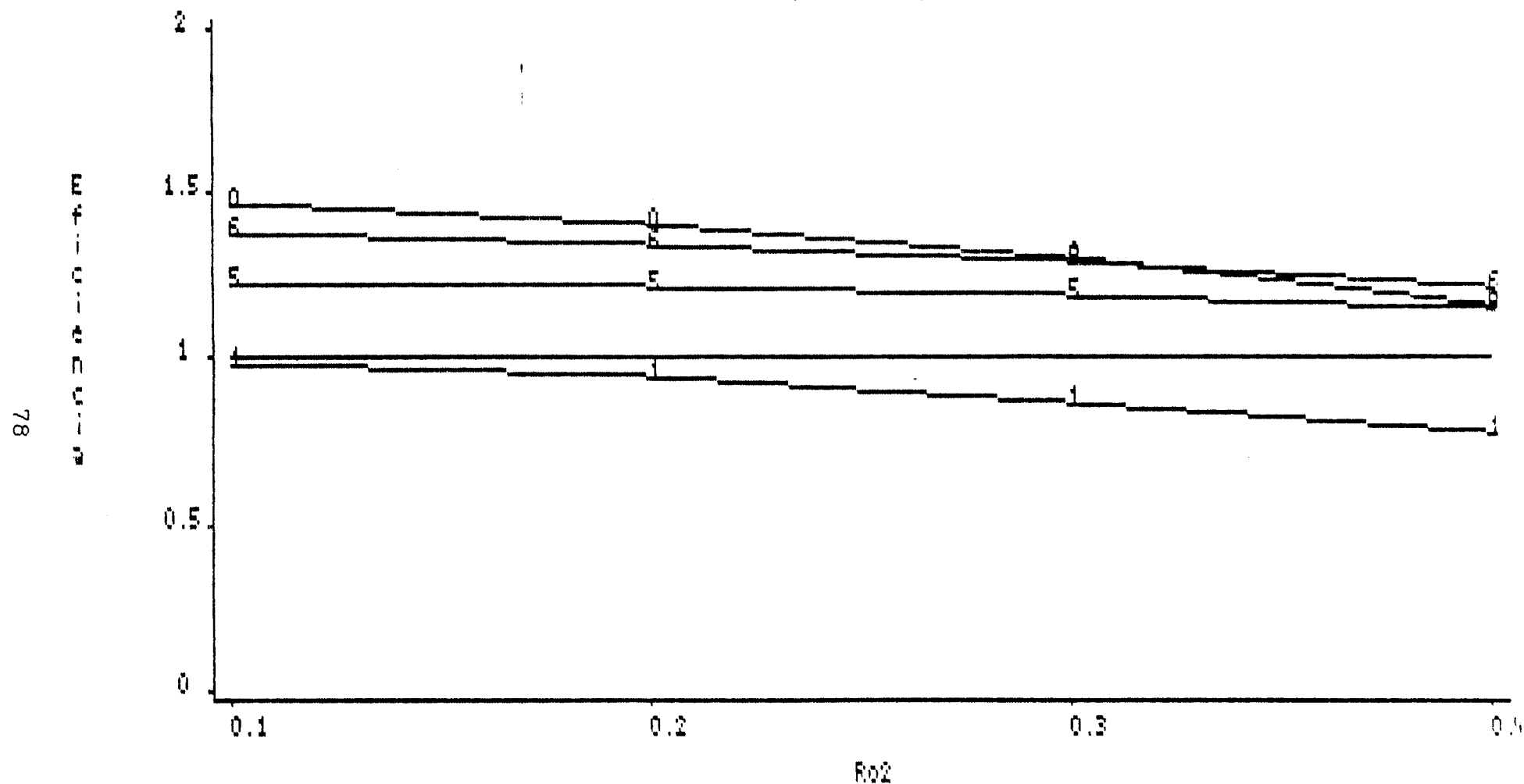


Tabela 3.5 : Eficiência para  $p = 4$ 

$Ro_1$	0,8		0,4			0,3		0,2
$Ro_2$	0,4	0,5	0,1	0,2	0,3	0,1	0,2	0,1
T	1,80	1,21	1,82	1,87	1,85	1,64	1,66	1,44
DC	1,30	0,87	0,93	0,95	0,94	0,88	0,89	0,83
TC	1,00	0,64	0,84	0,89	0,94	0,83	0,87	0,81
RA01	1,30	0,88	1,09	1,14	1,17	1,03	1,06	0,96
RA02	1,57	1,08	1,35	1,40	1,42	1,25	1,28	1,14
MC	1,90	1,40	1,77	1,81	1,85	1,60	1,62	1,40
BG	1,44	0,97	1,18	1,21	1,20	1,14	1,15	1,10
BIB	1,28	1,00	1,23	1,25	1,26	1,19	1,20	1,13

Para  $Ro_1 = 0,8$  temos que o Planejamento Proposto por Machin (MC) é o mais eficiente. Entretanto, quando  $Ro_1 \leq 0,4$ , o Planejamento Transversal (T) é o mais eficiente. É interessante observar que os Planejamentos Transversal (T), RA02, Machin (MC) e o BIB são sempre mais eficientes do que o Planejamento Longitudinal Puro. Para  $0,5 \leq Ro_1 \leq 0,7$  iremos apresentar os resultados através das Figuras 3.17, 3.18 e 3.19.

Fig 3.17 : Eficiencia para  $p=4$  e  $Ro_1=0.7$   
 "1"=DC, "2"=TC, "3"=HC, "5"=RAD1, "6"=RAD2, "7"=BIB, "8"=BG e "0"=I

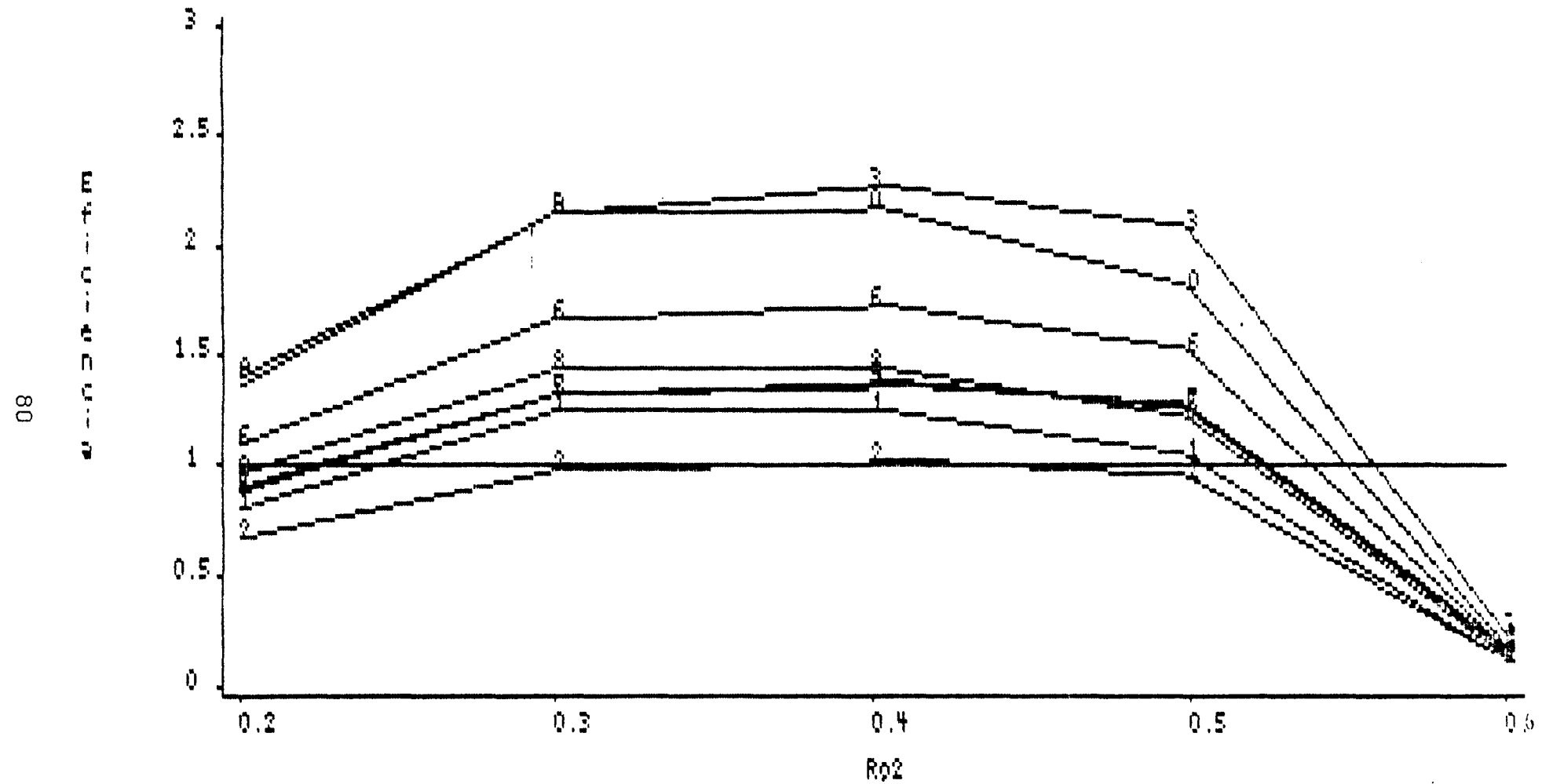


Fig 3.18 : Eficiencia para  $p=4$   $Ro_1=0.6$   
 "1"=DC, "2"=TC, "3"=HC, "5"=RAD1, "6"=RAD2, "7"=BIB, "8"=BG, "0"=T

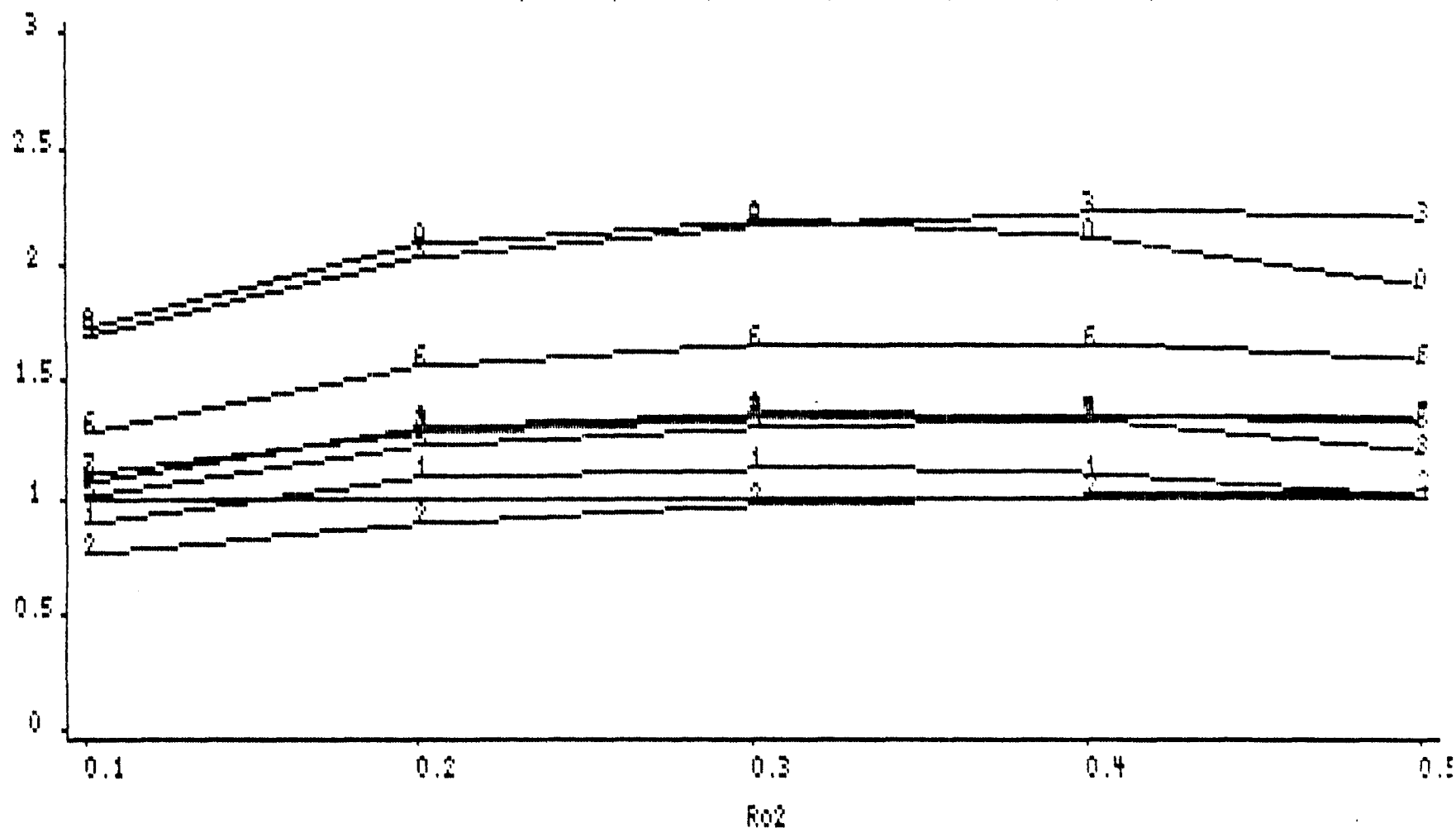
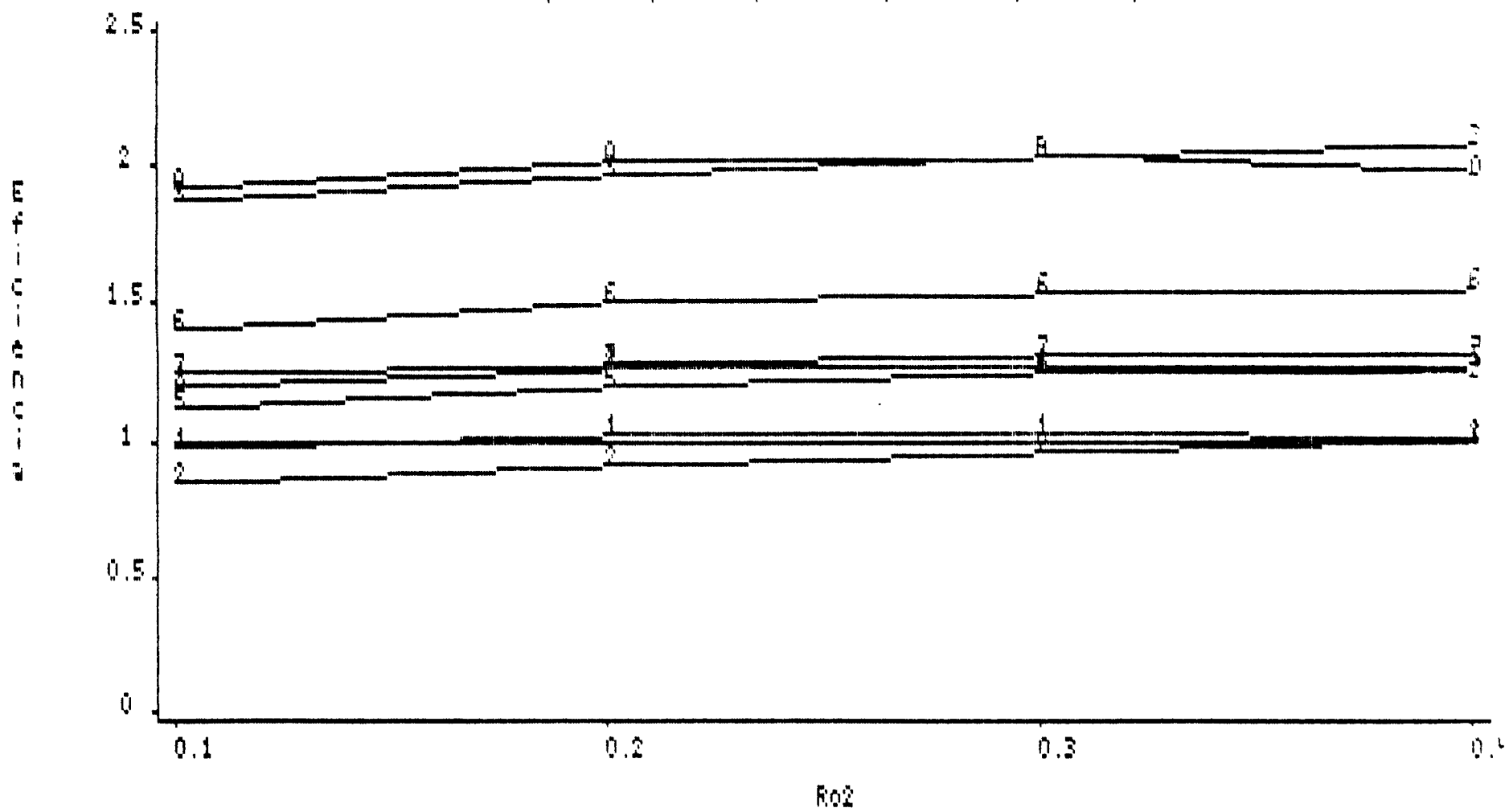




Fig 3.19 : Eficiencia para  $p=4$  e  $Ro1=0.5$   
 "1"=OC, "2"=TC, "3"=HC, "5"=RAD1, "6"=RAD2, "7"=BIB, "8"=BG e "0"=I



Observando a Fig. 3.17, verificamos que até um determinado ponto que pertence ao intervalo  $(0,2 , 0,3]$  o Planejamento Proposto por Machin (MC) e o *Planejamento Transversal* (T) são os mais eficientes apresentando aproximadamente os mesmos resultados. Entretanto, a partir do mesmo, o Planejamento Proposto por Machin (MC) torna-se o mais eficiente até o intervalo  $(0,5 , 0,6]$ . Neste intervalo, existe um valor a partir do qual o *Planejamento Longitudinal Puro* passa a ser o mais eficiente.

Nas Figs. 3.18 e 3.19, a partir do ponto de corte que pertence ao intervalo  $(0,3 , 0,4]$  temos que o Planejamento Proposto por Machin (MC) passa a ser o mais eficiente. Abaixo do ponto de corte o *Planejamento Transversal* (T) é o mais eficiente. Com exceção do Planejamento Proposto para três observações consecutivas (TC) todos os demais são mais eficientes do que o *Planejamento Longitudinal Puro*.

Tabela 3.6 : Eficiência para  $p = 5$

$Ro_1$	0,4			0,3		0,2
$Ro_2$	0,1	0,2	0,3	0,1	0,2	0,1
T	2,10	2,22	2,32	1,87	1,98	1,61
DC	0,98	1,04	1,08	0,94	1,00	0,91
TC	0,79	0,83	0,90	0,77	0,82	0,75
RAO1	1,06	1,12	1,18	1,00	1,06	0,94
RAO2	1,40	1,47	1,54	1,28	1,35	1,16
BIB	1,44	1,48	1,52	1,36	1,40	1,27

Neste caso, temos que o *Planejamento Transversal* (T) é o mais eficiente, sendo que os *Planejamentos* RAO2 e o BIB são mais eficientes do que o *Planejamento Longitudinal Puro*. Para os valores de  $0,5 \leq Ro_1 \leq 0,7$  vamos apresentar os resultados através das Figuras 3.20, 3.21 e 3.22.

Observando a Fig. 3.20 concluímos que o *Planejamento Transversal* (T) é o mais eficiente até o ponto de corte que pertence ao intervalo (0,4 , 0,5]. A partir deste ponto, temos que o *Planejamento Longitudinal Puro* passa a ser o mais eficiente. Nas Figs 3.21 e 3.22, temos que o *Planejamento Transversal* (T) é o mais eficiente.

Fig 3.20 : Eficiencia para  $p=5$  e  $Ro_1=0.7$

"1"=OC, "2"=IC, "5"=RAD1, "6"=RAD2, "7"=BIB e "0"=I

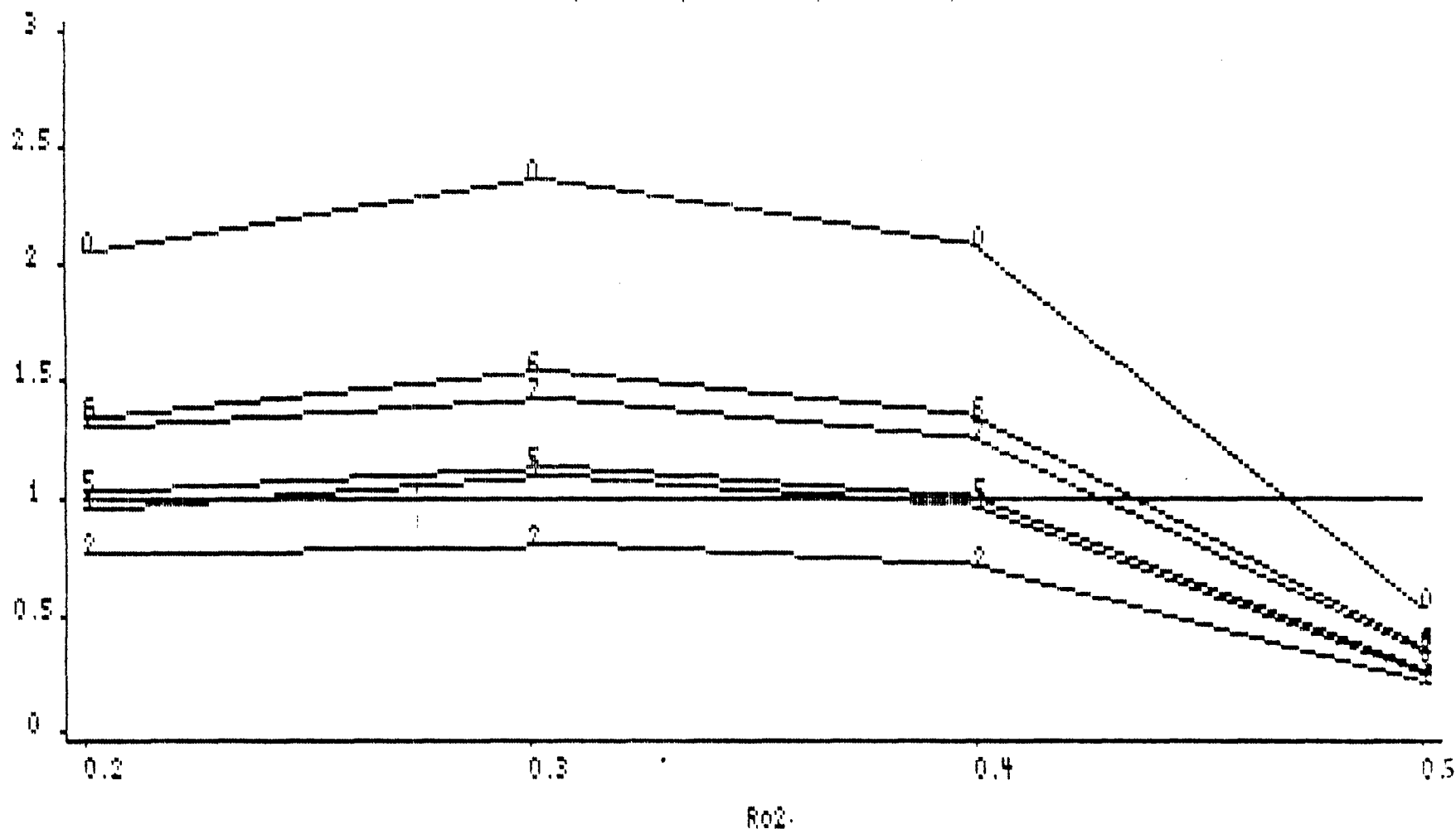


Fig 3.21 : Eficiencia para  $p=5$  e  $Ro1=0.6$ 

"1"=OC, "2"=TC, "5"=RAO1, "6"=RAO2, "7"=SIB e "0"=I

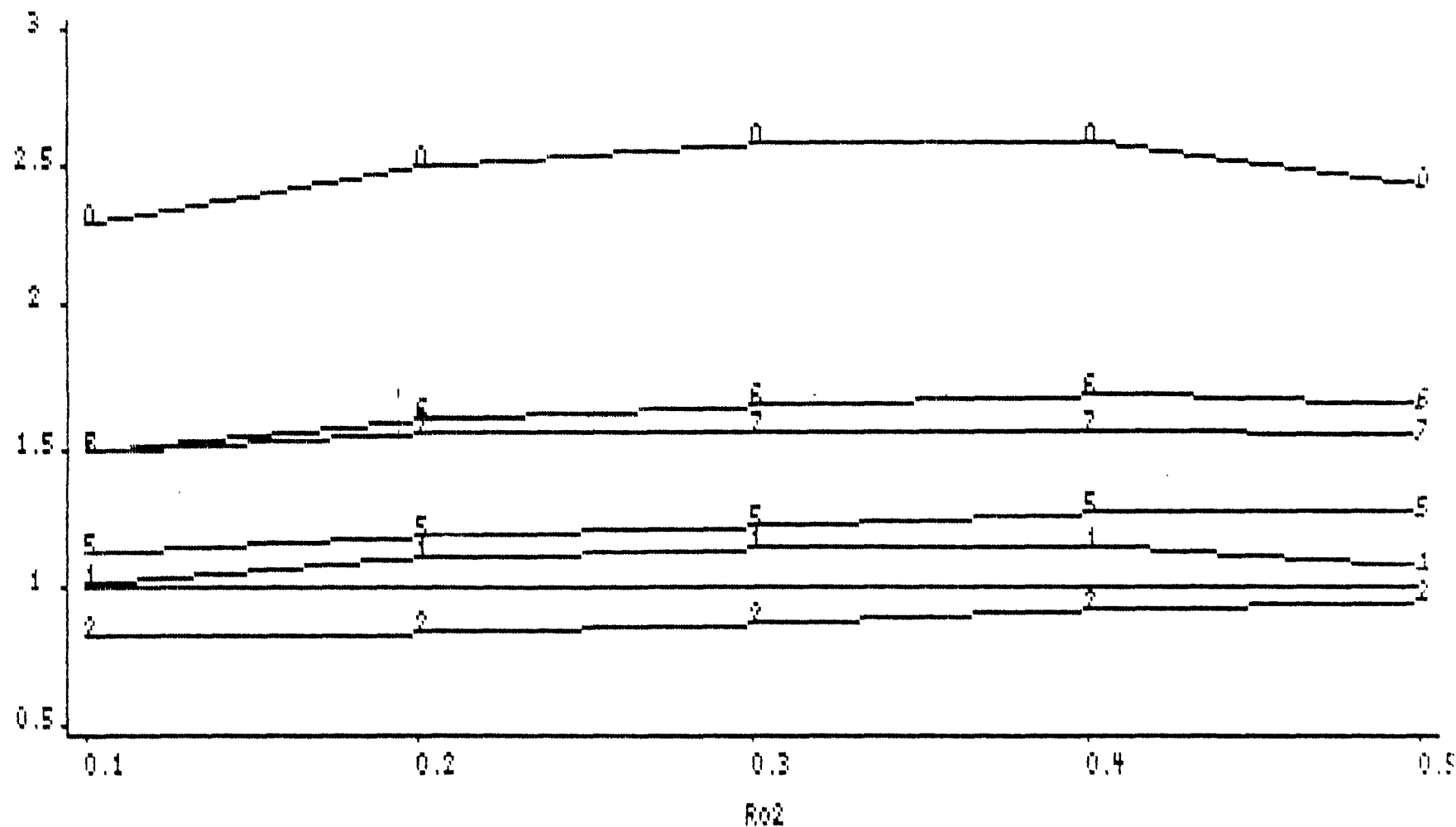


Fig 3.22 : Eficiencia para  $p=5$  e  $Ro1=0.5$

"1"=DC, "2"=TC, "5"=RAD1, "6"=RAD2, "7"=SIS e "0"=I

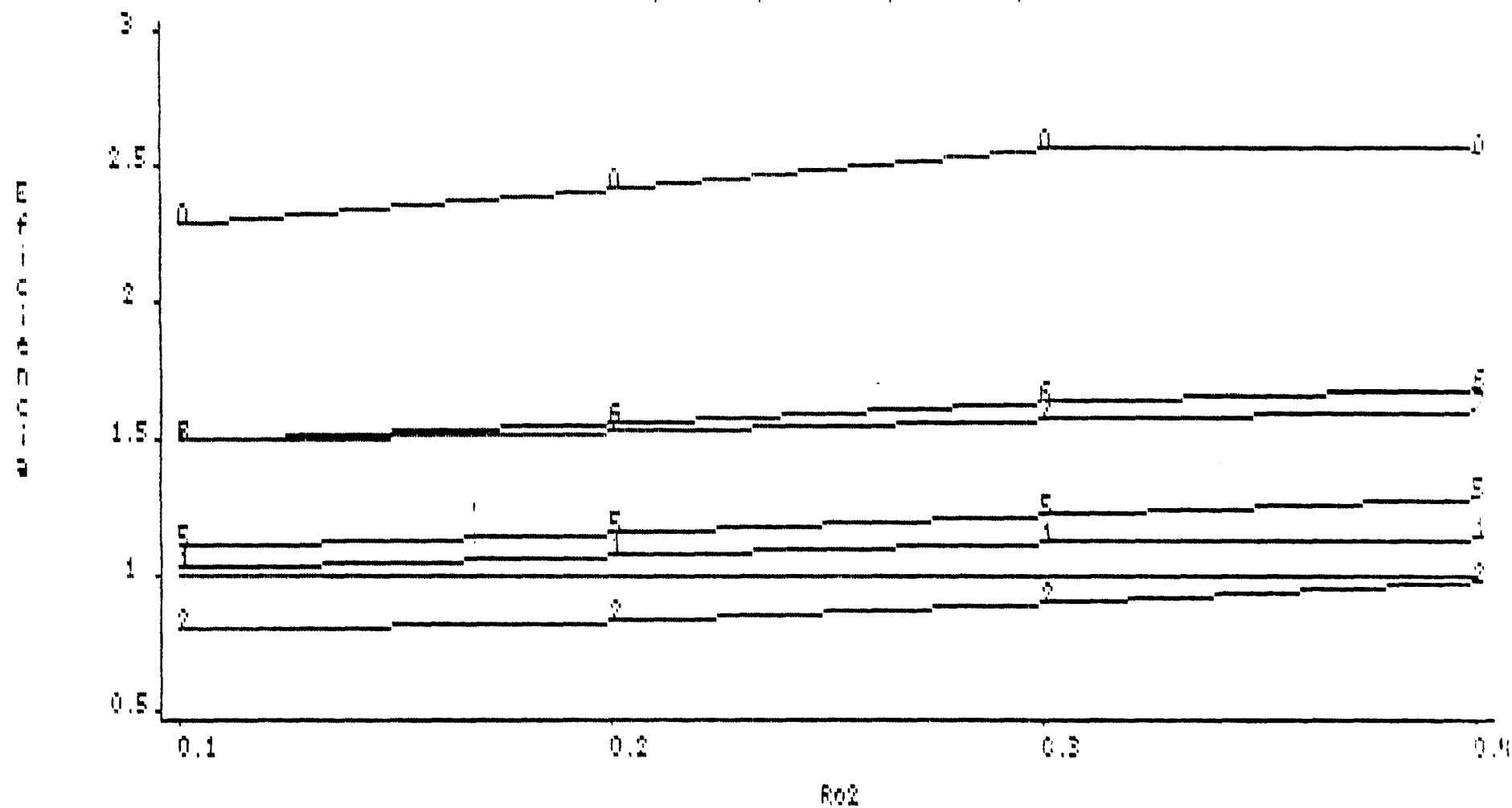


Tabela 3.7 : Eficiência para  $p = 6$ 

$Ro_1$	0,4			0,3		0,2
$Ro_2$	0,1	0,2	0,3	0,1	0,2	0,1
T	2,33	2,50	2,60	2,04	2,19	1,73
DC	1,05	1,13	1,17	1,02	1,10	0,98
TC	0,79	0,82	0,86	0,77	0,81	0,75
RA01	1,09	1,13	1,17	1,02	1,07	0,95
RA02	1,46	1,54	1,59	1,33	1,41	1,19
MC1	2,04	1,95	1,86	1,78	1,72	1,52
MC2	2,33	2,49	2,60	2,04	2,19	1,73
BG1	1,12	1,14	1,16	1,10	1,13	1,09
BG2	1,33	1,42	1,48	1,29	1,39	1,25
BIB	1,64	1,69	1,72	1,52	1,57	1,38

Os Planejamentos Propostos por Machin e Berger (MC1 e BG1) contemplam a formação de dois grupos com três *condições de avaliação* em cada. Do mesmo modo temos que nos planejamentos (MC2 e BG2) cada um dos três grupos formados será composto de duas *condições de avaliação*.

Observando a tabela acima, verificamos que os Planejamentos *Transversal* (T) e de Machin (MC2) são os mais eficientes apresentando praticamente os mesmos resultados.

Podemos concluir ainda, que com exceção dos Planejamentos com duas observações consecutivas (DC), com três observações consecutivas (TC) e RAO1 os demais são mais eficientes do que o *Planejamento Longitudinal Puro*. Para  $0,5 \leq Ro_1 \leq 0,7$  apresentaremos os resultados através das Figuras 3.23, 3.24 e 3.25.

Na Fig. 3.23 temos que o Planejamento Proposto por Machin (MC2) e o *Planejamento Transversal* (T) são os mais eficientes, apresentando os mesmos resultados. Todavia, existe um ponto no intervalo  $(0,4, 0,5]$  onde a partir do mesmo o *Planejamento Longitudinal Puro* passa a ser o mais eficiente.

Nas Figs. 3.24 e 3.25, verificamos que os Planejamentos Propostos por Machin (MC2) e o *Planejamento Transversal* (T) são sempre os mais eficientes e apresentam a mesma trajetória. Por outro lado, temos que estes Planejamentos Propostos juntamente com MC1, BIB e RAO2 são mais eficientes do que o *Planejamento Longitudinal Puro*.



Fig 3.23 : Eficiencia para  $p=6$  e  $Ro_1=0.7$   
 "1"=DC, "3"=HC1, "4"=HC2, "5"=RAD1, "6"=RAD2, "7"=BIB, "8"=BG1, "9"=BG2, "0"=T

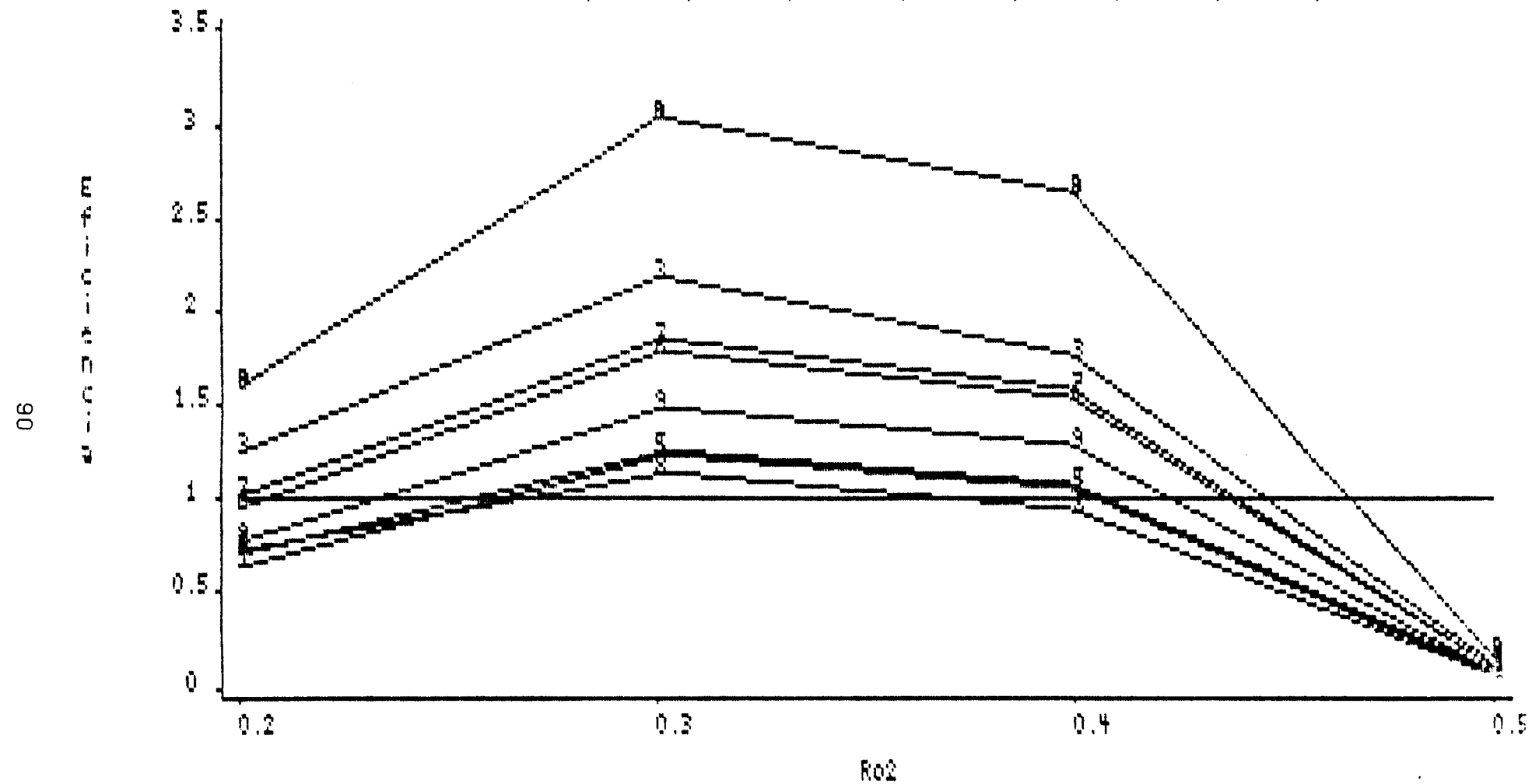


Fig 3.24 : Eficiencia para  $p=6$  e  $Ro_1=0.6$   
 "1"=OC, "3"=MC1, "4"=MC2, "5"=RAD1, "6"=RAD2, "7"=BIB, "8"=BG1, "9"=BG2, "10"=T

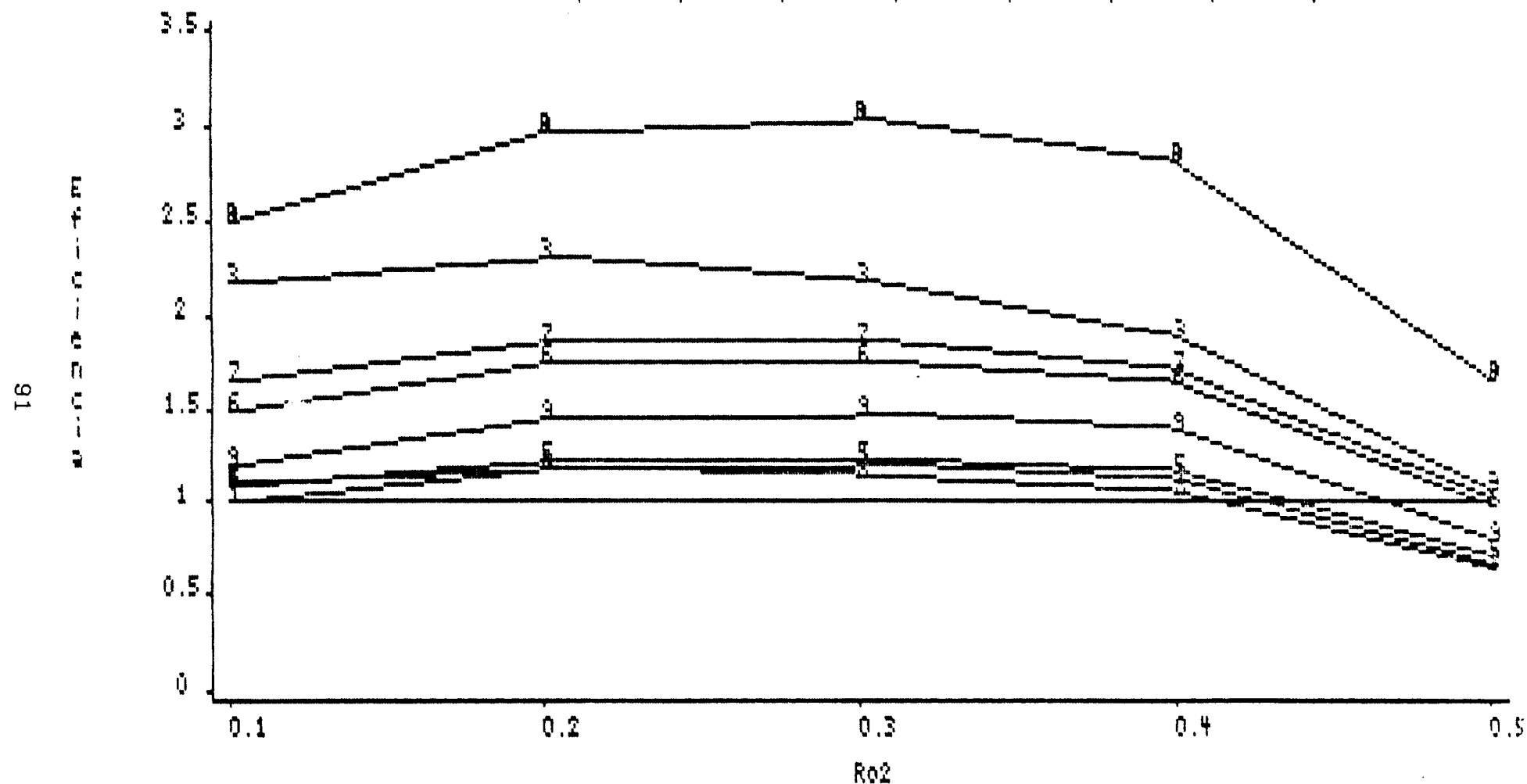


Fig 3.25 : Eficiencia para  $p=6$  e  $Ro1=0.5$   
 "1"=DC, "3"=HC1, "4"=HC2, "5"=RAD1, "6"=RAD2, "7"=BIB, "8"=BGI, "9"=BGI2, "0"=T

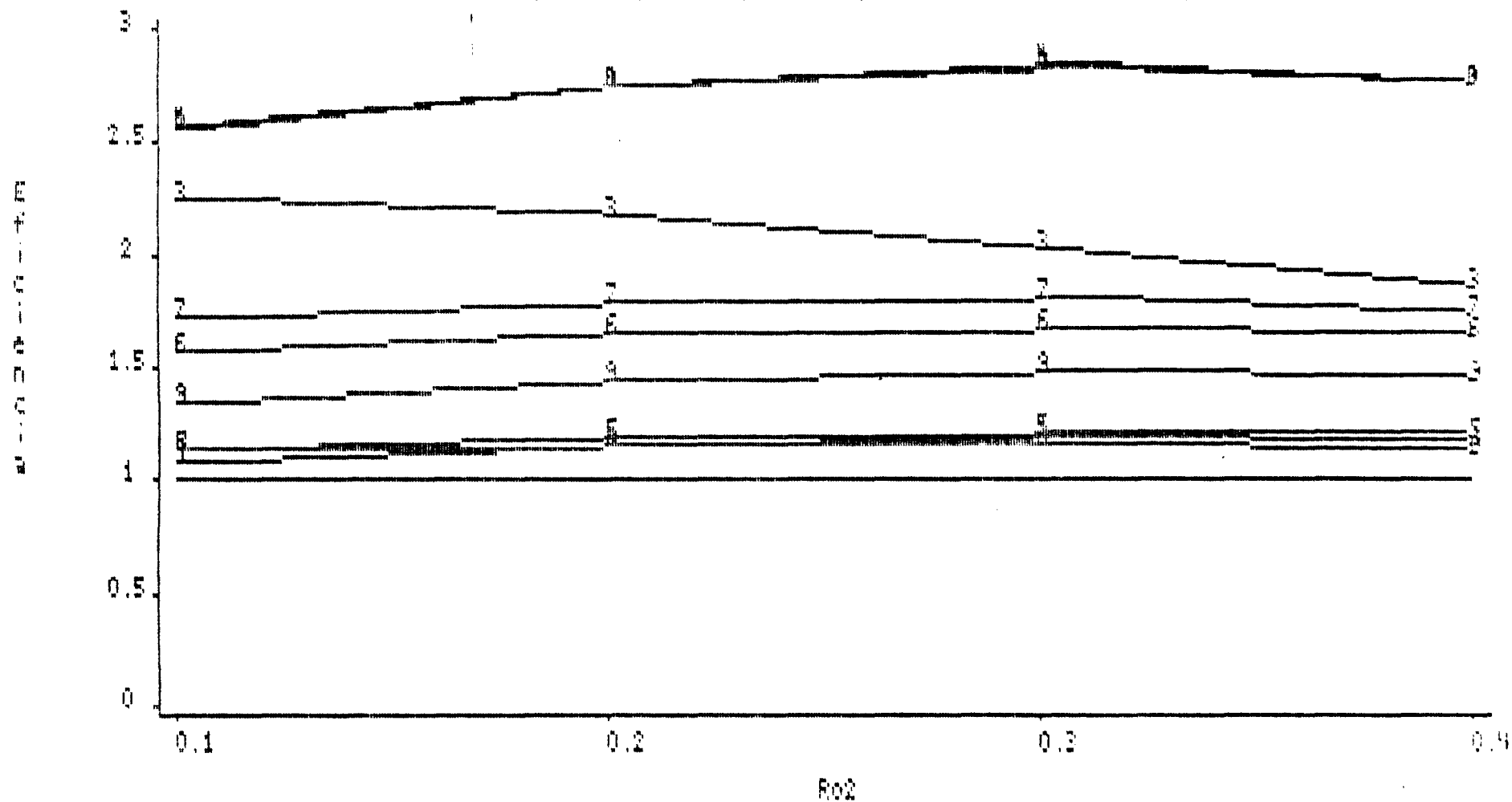


Tabela 3.8 : Eficiência para  $p = 7$

$Ro_1$	0,7		0,4			0,3		0,2
$Ro_2$	0,3	0,4	0,1	0,2	0,3	0,1	0,2	0,1
T	3,51	3,06	2,51	2,73	2,89	2,17	2,38	1,83
DC	1,32	1,15	1,12	1,22	1,29	1,09	1,19	1,04
TC	0,91	0,75	0,81	0,85	0,88	0,79	0,83	0,77
RAO1	1,33	1,12	1,13	1,18	1,22	1,05	1,11	0,98
RAO2	1,92	1,65	1,53	1,62	1,68	1,38	1,48	1,23
BIB	2,15	1,88	1,80	1,88	1,93	1,64	1,72	1,47

O *Planejamento Transversal* (T) é o mais eficiente, sendo que os *Planejamentos* com duas observações consecutivas (DC), RAO2 e o BIB são mais eficientes do que o *Planejamento Longitudinal Puro*. Para  $0,5 \leq Ro_1 \leq 0,6$  vamos apresentar os resultados através das Figuras 3.26 e 3.27.

Observando ambas as figuras, constatamos que o *Planejamento Transversal* (T) é sempre o mais eficiente. Com exceção do *Planejamento Proposto* para três observações consecutivas (TC), temos que todos os demais são mais eficientes do que o *Planejamento Longitudinal Puro*.

Fig 3.26 : Eficiencia para  $p=7$  e  $Ro1=0.6$

"1"=DC, "2"=IC, "5"=RAD1, "6"=RAD2, "7"=SIB e "0"=I

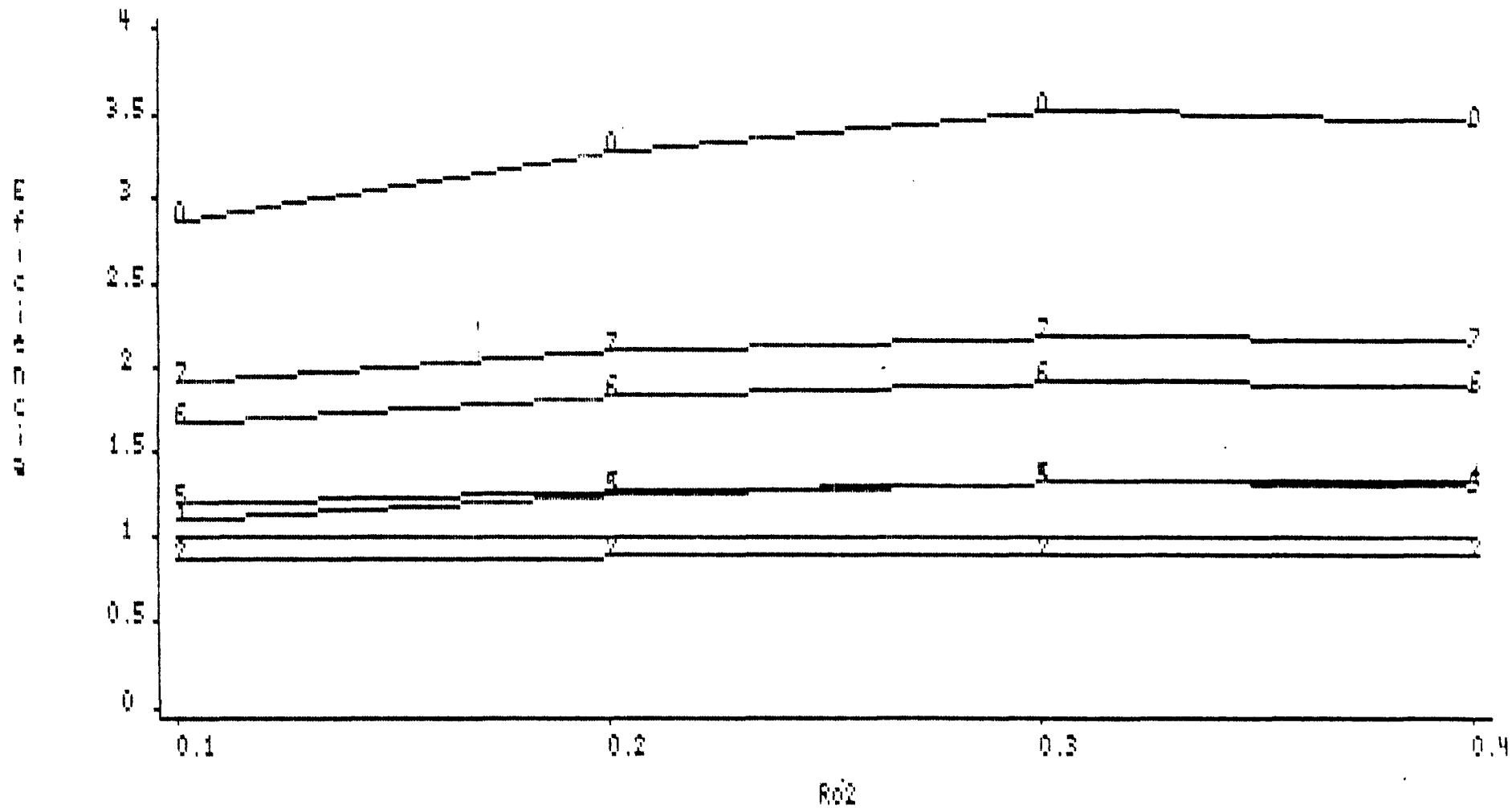


Fig 3.27 : Eficiencia para  $p=7$  e  $Ro1=0.5$

"1"=DC, "2"=IC, "5"=RAD1, "6"=RAD2, "7"=818 e "0"=1

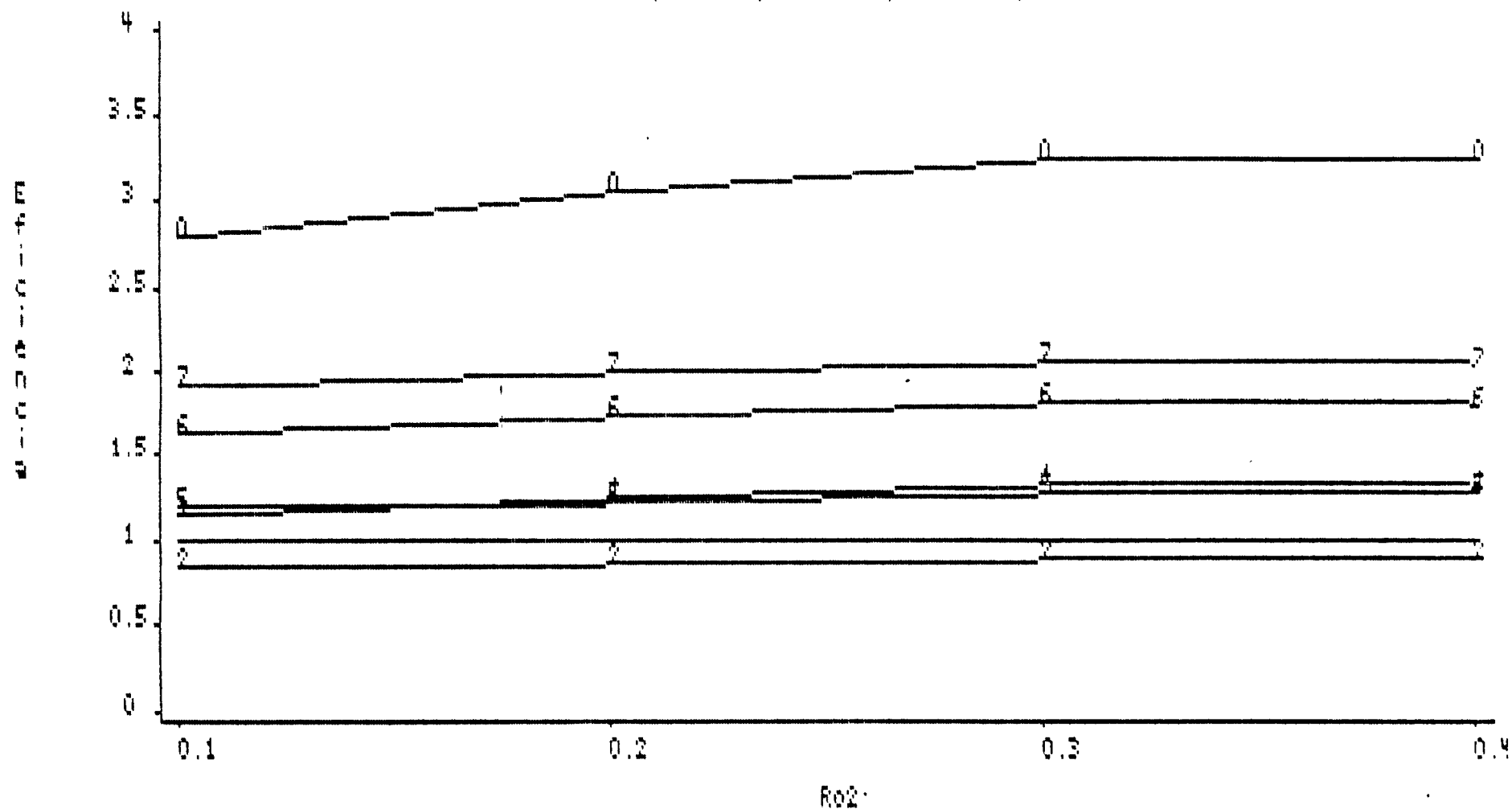


Tabela 3.9 : Eficiência para  $p = 8$ 

$Ro_1$	0,7	0,4			0,3		0,2
$Ro_2$	0,3	0,1	0,2	0,3	0,1	0,2	0,1
T	3,67	2,65	2,93	3,16	2,28	2,53	1,90
DC	1,31	1,18	1,30	1,41	1,15	1,27	1,10
TC	0,90	0,85	0,88	0,92	0,82	0,86	0,80
RAO1	1,32	1,17	1,23	1,28	1,09	1,16	1,01
RAO2	1,93	1,59	1,70	1,79	1,44	1,54	1,27
MC1	2,30	2,20	2,07	1,98	1,89	1,80	1,58
MC2	3,67	2,65	2,93	3,16	2,28	2,53	1,90
BG1	1,11	1,10	1,11	1,13	1,08	1,10	1,07
BG2	1,55	1,44	1,59	1,71	1,40	1,56	1,35
BIB	1,89	1,71	1,77	1,83	1,57	1,64	1,42

Os Planejamentos Propostos por Machin e Berger (MC1, MC2 e BG1, BG2) tem definição análoga a apresentada quando  $p = 6$ .

Conforme tabela acima, verificamos que com exceção do Planejamento que contempla três observações consecutivas (TC), todos os outros são mais eficientes do que o *Planejamento Longitudinal Puro*, sendo que o *Planejamento Transversal* (T) e o de Machin (MC2) são os mais eficientes apresentando praticamente os mesmos resultados. Para  $0,5 \leq Ro_1 \leq 0,6$  vamos apresentar os resultados através das Figuras 3.28 e 3.29.

Fig 3.28 : Eficiencia para  $p=8$  e  $R_{01}=0.6$   
 "1"=DC, "3"=HC1, "4"=HC2, "5"=RAD1, "6"=RAD2, "7"=BIB, "8"=BG1, "9"=BG2, "0"=T

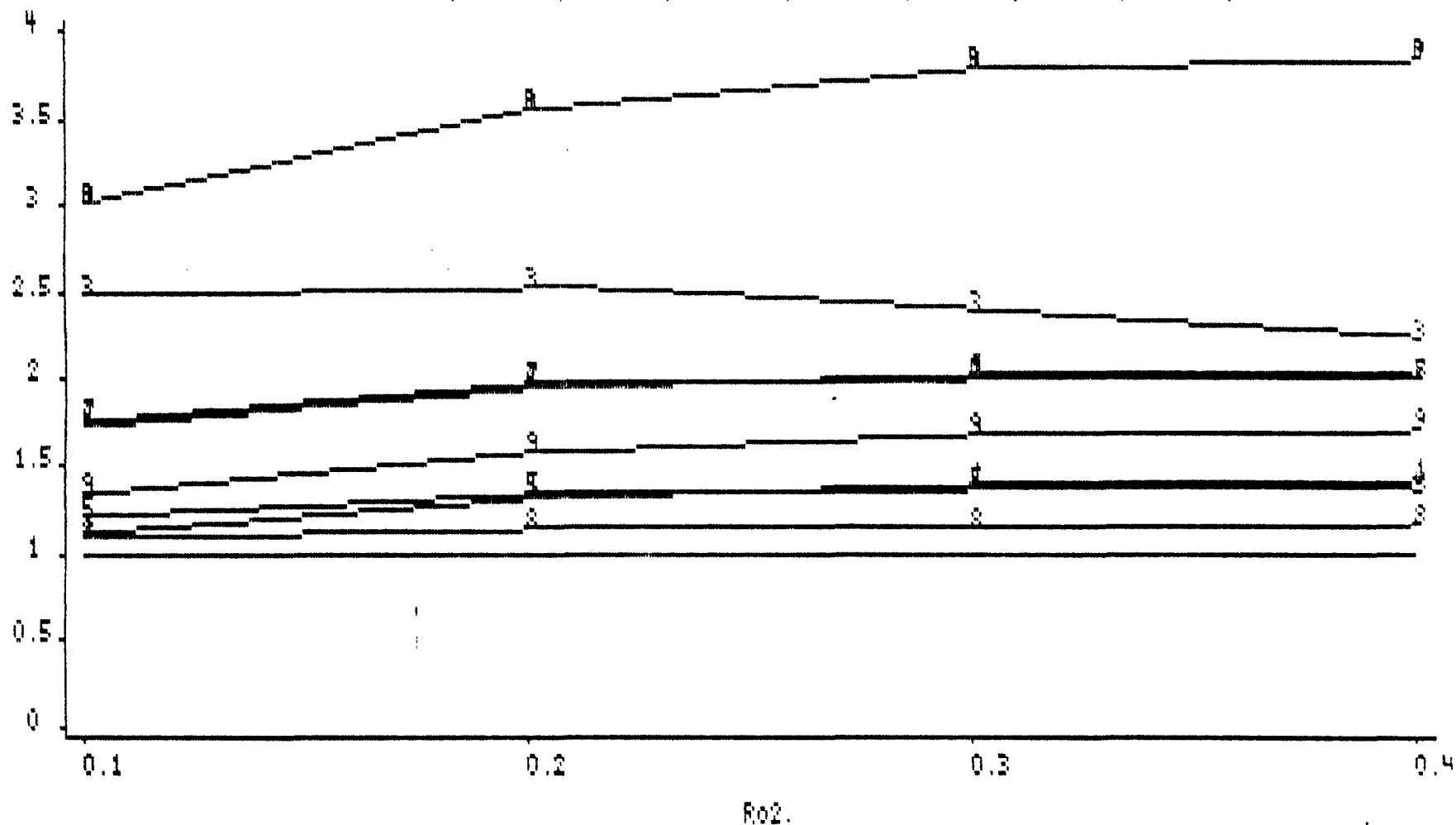
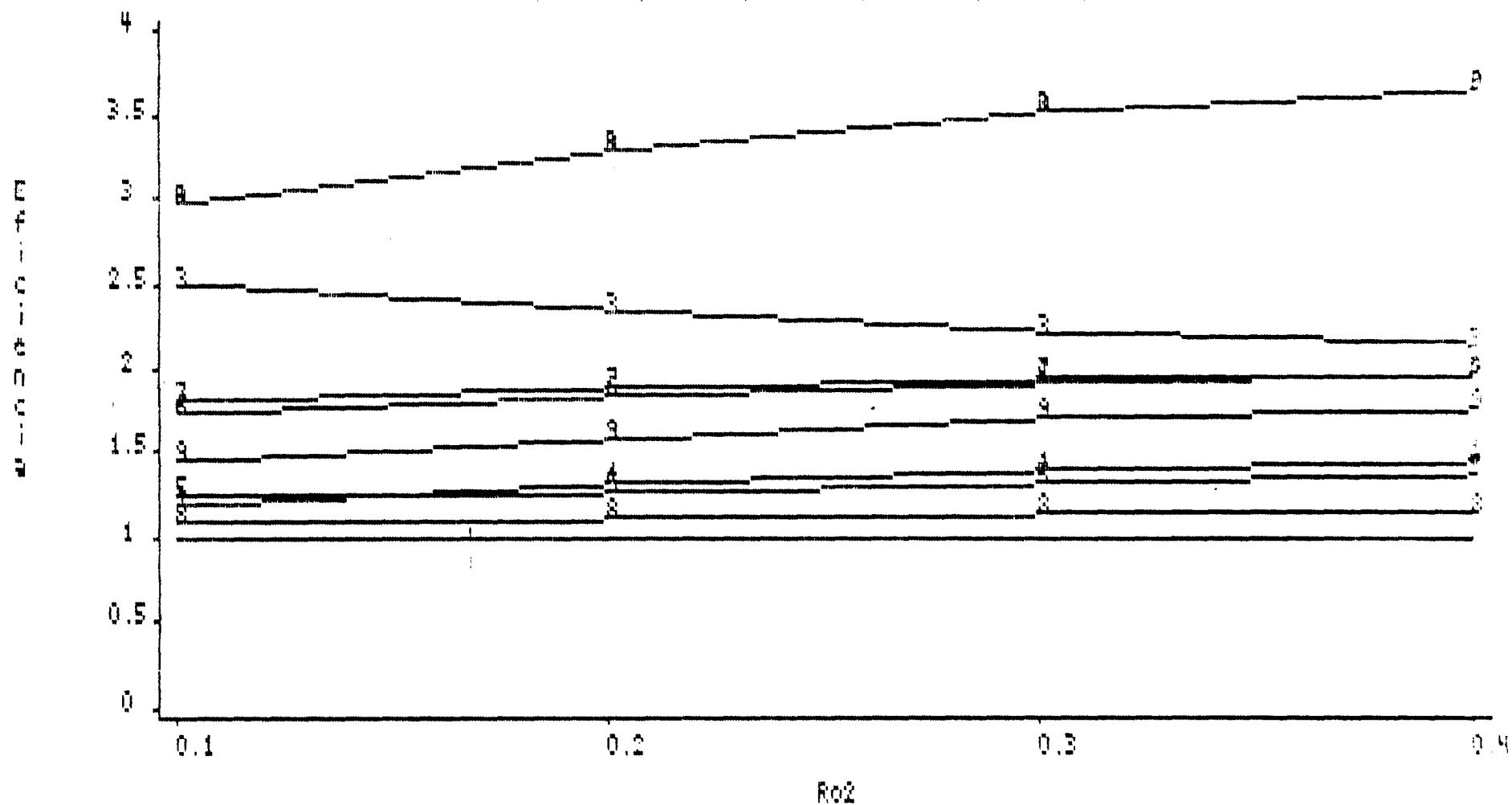




Fig 3.29 : Eficiencia para  $p=8$  e  $Ro1=0.5$   
 "1"=DC, "3"=HC1, "4"=HC2, "5"=RAD1, "6"=RAD2, "7"=81B, "8"=8G1, "9"=8G2, "0"=T



Nas Figuras 3.28 e 3.29 temos que o Planejamento Proposto por Machin (MC2) e o *Planejamento Transversal* (T) são os mais eficientes, sendo que ambos apresentam os mesmos resultados. Todos os demais Planejamentos Propostos são mais eficientes do que o *Planejamento Longitudinal Puro*.

Em resumo, através das tabelas seguintes iremos descrever o comportamento da eficiência para esta estrutura de covariância. Inicialmente vamos considerar  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ ,  $c_4$  e  $c_5$  os pontos de corte pertencentes, respectivamente, aos intervalos  $(0,1, 0,2]$ ,  $(0,2, 0,3]$ ,  $(0,3, 0,4]$ ,  $(0,4, 0,5]$  e  $(0,5, 0,6]$ .

Tabela 3.10 : Eficiência para Estrutura Auto-Regressiva Ge quando  $Ro_1 = 0,7$  e  $0,8$

	$Ro_1 = 0,8$	$Ro_1 = 0,7$
p	$c_3 \leq Ro_2 < 0,8$	$0,1 \leq Ro_2 < 0,7$
3	RAO2	RAO2
$Ro_1 = 0,7$		
	$c_1 \leq Ro_2 \leq 0,3$	$0,3 \leq Ro_2 \leq c_5$
4	T	MC
	$c_1 \leq Ro_2 \leq c_4$	
5	T	
6	T e MC2	

Tabela 3.11 : Eficiência para Estrutura Auto-Regressiva Geral  
quando  $Ro_1 = 0,6$  e  $0,5$

$Ro_1 = 0,6$			$Ro_1 = 0,5$	
p	$0,1 \leq Ro_2 \leq c_2$	$c_2 \leq Ro_2 < 0,6$	$0,1 \leq Ro_2 \leq c_3$	$c_3 \leq Ro_2 < 0,5$
3	T	RA02	T	RA02
	$0,1 \leq Ro_2 \leq c_3$	$c_3 \leq Ro_2 < 0,6$	$0,1 \leq Ro_2 \leq 0,3$	$0,3 \leq Ro_2 < 0,5$
4	T	MC	T	MC
	$0,1 \leq Ro_2 < 0,6$		$0,1 \leq Ro_2 < 0,5$	
5	T		T	
6	T e MC2		T e MC2	
	$0,1 \leq Ro_2 \leq c_4$		$0,1 \leq Ro_2 < 0,5$	
7	T		T	
8	T e MC2		T e MC2	

### 3.2.1.4 - ESTRUTURA DE EFEITOS ALEATÓRIOS

Para esta estrutura de covariância vamos apresentar os resultados através de tabelas.

Por exemplo, se tivermos  $p = 3$ ,  $\delta_1 = 0,1$ ,  $\delta_2 = 0,02$ ,  $\delta_3 = 0,1$  e  $\sigma^2 = 0,5$ , através da expressão (2.7), vamos obter os seguintes resultados :

$$\underset{\sim}{\Sigma} = \underset{\sim}{V(y)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0,02 \\ 0,02 & 0,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + 0,5 I_3$$

$$\underset{\sim}{\Sigma} = \underset{\sim}{V(y)} = \begin{bmatrix} 1,02 & 0,12 \\ 1,04 & 0,22 \\ 1,06 & 0,32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + 0,5 I_3$$

$$\underset{\sim}{\Sigma} = \underset{\sim}{V(y)} = \begin{bmatrix} 1,14 & 1,26 & 1,38 \\ 1,26 & 1,48 & 1,70 \\ 1,38 & 1,70 & 2,02 \end{bmatrix} + 0,5 I_3$$

$$\underset{\sim}{\Sigma} = \underset{\sim}{V(y)} = \begin{bmatrix} 1,64 & 1,26 & 1,38 \\ 1,26 & 1,98 & 1,70 \\ 1,38 & 1,70 & 2,52 \end{bmatrix}$$

É interessante observar que as variâncias apresentam um comportamento crescente. Podemos agora, calcular as correlações entre as observações  $y_1$ ,  $y_2$  e  $y_3$  que foram efetuadas nas três condições de avaliação programadas.

$$\rho(y_1, y_2) = \frac{1,26}{\sqrt{1,64 \times 1,98}} = 0,70$$

$$\rho(y_1, y_3) = \frac{1,38}{\sqrt{1,64 \times 2,52}} = 0,68$$

$$\rho(y_2, y_3) = \frac{1,70}{\sqrt{1,98 \times 2,52}} = 0,76$$

Estes resultados nos mostram que, quando os parâmetros do modelo assumem os valores acima, as correlações entre duas observações consecutivas são diferentes, sendo que a correlação decresce quando as observações se distanciam.

Tabela 3.12 : Eficiência para  $p = 3$

$\delta_2$	0,02							
$\delta_1$	0,1				1,0			
$\delta_3$	0,01		0,1		0,01		0,1	
$\sigma^2$	0,50	2,00	0,50	2,00	0,50	2,00	0,50	2,00
T	1,13	1,08	1,10	1,15	0,76	1,11	0,78	1,11
DC	0,72	0,75	0,73	0,75	0,64	0,70	0,73	0,71
RA01	1,08	1,03	1,12	1,07	1,12	1,09	1,15	1,10
RA02	1,12	1,06	1,17	1,11	1,10	1,12	1,15	1,15

Tabela 3.13 : Eficiência para  $p = 3$

$\delta_2$	-0,02							
$\delta_1$	0,1				1,0			
$\delta_3$	0,01		0,1		0,01		0,1	
$\sigma^2$	0,50	2,00	0,50	2,00	0,50	2,00	0,50	2,00
T	1,09	1,03	1,18	1,14	0,82	1,12	0,84	1,13
DC	0,75	0,75	0,76	0,76	0,65	0,71	0,74	0,72
RA01	1,04	1,01	1,12	1,06	1,12	1,08	1,16	1,10
RA02	1,06	1,02	1,18	1,10	1,11	1,12	1,16	1,15

Tabela 3.14 : Eficiência para  $p = 4$ 

$\delta_2$	0,02							
$\delta_1$	0,1				1,0			
$\delta_3$	0,01		0,1		0,01		0,1	
$\sigma^2$	0,50	2,00	0,50	2,00	0,50	2,00	0,50	2,00
T	1,38	1,20	1,42	1,41	1,00	1,35	1,16	1,43
DC	0,72	0,76	0,74	0,78	0,57	0,70	0,75	0,73
TC	0,76	0,75	0,83	0,78	0,75	0,74	0,92	0,79
RA01	0,91	0,86	1,02	0,94	0,91	0,90	1,13	0,97
RA02	1,08	0,98	1,20	1,11	1,02	1,06	1,26	1,15
MC	1,39	1,17	1,67	1,38	1,59	1,39	1,97	1,54
BG	0,92	1,01	0,88	1,00	0,66	0,89	0,84	0,90
BIB	1,13	1,06	1,20	1,13	1,19	1,13	1,29	1,17

Tabela 3.15 : Eficiência para  $p = 4$

$\delta_2$	-0,02							
$\delta_1$	0,1				1,0			
$\delta_3$	0,01		0,1		0,01		0,1	
$\sigma^2$	0,50	2,00	0,50	2,00	0,50	2,00	0,50	2,00
T	1,23	1,07	1,55	1,39	1,09	1,35	1,27	1,46
DC	0,78	0,75	0,80	0,80	0,60	0,71	0,78	0,74
TC	0,77	0,74	0,85	0,79	0,76	0,74	0,94	0,80
RAO1	0,88	0,83	1,05	0,94	0,92	0,90	1,16	0,97
RAO2	1,01	0,92	1,25	1,10	1,05	1,06	1,31	1,16
MC	1,20	1,06	1,67	1,35	1,59	1,36	2,00	1,53
BG	1,03	1,01	0,97	1,03	0,70	0,92	0,88	0,92
BIB	1,07	1,02	1,21	1,12	1,19	1,12	1,30	1,17



Tabela 3.16 : Eficiência para  $p = 5$

$\delta_2$	0,02							
$\delta_1$	0,1				1,0			
$\delta_3$	0,01		0,1		0,01		0,1	
$\sigma^2$	0,50	2,00	0,50	2,00	0,50	2,00	0,50	2,00
T	1,66	1,35	1,78	1,74	1,28	1,61	1,67	1,83
DC	0,80	0,83	0,80	0,88	0,59	0,76	0,87	0,83
TC	0,69	0,69	0,79	0,74	0,66	0,66	0,97	0,75
RAO1	0,89	0,84	1,02	0,95	0,84	0,85	1,24	0,98
RAO2	1,12	1,00	1,28	1,20	1,03	1,09	1,48	1,25
BIB	1,31	1,16	1,47	1,32	1,43	1,29	1,71	1,42

Tabela 3.17 : Eficiência para  $p = 5$ 

$\delta_2$	-0,02							
$\delta_1$	0,1				1,0			
$\delta_3$	0,01		0,1		0,01		0,1	
$\sigma^2$	0,50	2,00	0,50	2,00	0,50	2,00	0,50	2,00
T	1,42	1,12	1,98	1,72	1,43	1,60	1,86	1,88
DC	0,88	0,79	0,90	0,91	0,64	0,79	0,94	0,86
TC	0,74	0,69	0,83	0,76	0,68	0,67	1,01	0,77
RA01	0,89	0,79	1,08	0,96	0,87	0,86	1,29	0,99
RA02	1,07	0,90	1,38	1,20	1,08	1,09	1,56	1,27
BIB	1,19	1,06	1,48	1,30	1,43	1,28	1,74	1,42

Tabela 3.18 : Eficiência para  $p = 6$ 

$\delta_2$	0,02							
$\delta_1$	0,1				1,0			
$\delta_3$	0,01		0,1		0,01		0,1	
$\sigma^2$	0,50	2,00	0,50	2,00	0,50	2,00	0,50	2,00
T	1,97	1,53	2,16	2,12	1,61	1,89	2,32	2,32
DC	0,90	0,93	0,89	1,01	0,66	0,87	1,06	0,97
TC	0,68	0,71	0,79	0,76	0,64	0,66	1,08	0,78
RA01	0,91	0,87	1,06	1,01	0,85	0,87	1,41	1,05
RA02	1,22	1,08	1,39	1,33	1,10	1,17	1,78	1,42
MC1	1,66	1,34	1,99	1,69	1,96	1,62	2,60	1,95
MC2	2,02	1,48	2,72	2,11	2,55	1,93	3,96	2,54
BG1	0,89	1,01	0,96	0,99	0,73	0,86	1,18	0,96
BG2	1,13	1,19	1,10	1,27	0,78	1,09	1,22	1,19
BIB	1,54	1,28	1,82	1,58	1,74	1,49	2,28	1,76

Tabela 3.19 : Eficiência para  $p = 6$ 

$\delta_2$	-0,02							
$\delta_1$	0,1				1,0			
$\delta_3$	0,01		0,1		0,01		0,1	
$\sigma^2$	0,50	2,00	0,50	2,00	0,50	2,00	0,50	2,00
T	1,70	1,20	2,44	2,12	1,86	1,88	2,61	2,39
DC	1,03	0,86	1,02	1,06	0,75	0,91	1,16	1,02
TC	0,79	0,70	0,86	0,79	0,68	0,68	1,14	0,81
RAO1	0,97	0,81	1,15	1,04	0,91	0,89	1,50	1,09
RAO2	1,20	0,93	1,53	1,36	1,20	1,18	1,91	1,46
MC1	1,45	1,14	2,01	1,67	1,99	1,58	2,66	1,96
MC2	1,64	1,19	2,77	2,06	2,59	1,86	4,08	2,55
BG1	1,08	1,03	1,05	1,04	0,79	0,90	1,24	0,99
BG2	1,28	1,09	1,27	1,32	0,89	1,14	1,33	1,25
BIB	1,37	1,12	1,72	1,37	1,75	1,46	2,09	1,61

Tabela 3.20 : Eficiência para  $p = 7$ 

$\delta_2$	0,02							
$\delta_1$	0,1				1,0			
$\delta_3$	0,01		0,1		0,01		0,1	
$\sigma^2$	0,50	2,00	0,50	2,00	0,50	2,00	0,50	2,00
T	2,32	1,75	2,55	2,54	2,02	2,21	3,11	2,89
DC	1,02	1,05	0,99	1,15	0,76	0,99	1,30	1,16
TC	0,71	0,76	0,81	0,80	0,66	0,68	1,22	0,85
RA01	0,97	0,94	1,11	1,09	0,90	0,94	1,64	1,18
RA02	1,60	1,42	1,86	1,81	1,42	1,50	2,55	1,94
BIB	1,73	1,42	1,96	1,63	2,08	1,69	2,58	1,89

Tabela 3.21 : Eficiência para  $p = 7$ 

$\delta_2$	-0,02							
$\delta_1$	0,1				1,0			
$\delta_3$	0,01		0,1		0,01		0,1	
$\sigma^2$	0,50	2,00	0,50	2,00	0,50	2,00	0,50	2,00
T	2,06	1,31	2,92	2,56	2,40	2,19	3,52	3,01
DC	1,22	0,94	1,15	1,22	0,90	1,05	1,43	1,23
TC	0,89	0,74	0,90	0,85	0,73	0,72	1,31	0,89
RA01	1,11	0,86	1,23	1,14	1,01	0,97	1,76	1,23
RA02	1,39	1,00	1,70	1,54	1,40	1,31	2,32	1,71
BIB	1,58	1,19	2,01	1,56	2,14	1,66	2,67	1,90

Tabela 3.22 : Eficiência para  $p = 8$ 

$\delta_2$	0,02							
$\delta_1$	0,1				1,0			
$\delta_3$	0,01		0,1		0,01		0,1	
$\sigma^2$	0,50	2,00	0,50	2,00	0,50	2,00	0,50	2,00
T	2,69	2,00	2,95	2,97	2,51	2,56	4,02	3,54
DC	1,15	1,18	1,09	1,30	0,90	1,13	1,57	1,37
TC	0,75	0,82	0,85	0,86	0,71	0,74	1,39	0,94
RA01	1,05	1,04	1,18	1,19	0,99	1,02	1,90	1,33
RA02	1,48	1,31	1,65	1,66	1,40	1,43	2,54	1,90
MC1	1,84	1,50	2,16	1,87	2,27	1,79	2,97	2,24
MC2	2,83	1,92	4,00	3,02	4,01	2,63	6,99	4,00
BG1	0,87	0,99	1,05	1,00	0,84	0,85	1,52	1,06
BG2	1,40	1,44	1,35	1,60	1,05	1,37	1,80	1,64
BIB	1,68	1,42	1,95	1,72	2,02	1,65	2,67	2,02

Tabela 3.23 : Eficiência para  $p = 8$ 

$\delta_2$	-0,02							
$\delta_1$	0,1				1,0			
$\delta_3$	0,01		0,1		0,01		0,1	
$\sigma^2$	0,50	2,00	0,50	2,00	0,50	2,00	0,50	2,00
T	2,81	1,49	3,43	3,03	3,14	2,57	4,59	3,72
DC	1,45	1,04	1,29	1,39	1,12	1,22	1,75	1,47
TC	1,02	0,81	0,95	0,92	0,82	0,80	1,50	0,99
RA01	1,29	0,94	1,33	1,26	1,16	1,08	2,06	1,41
RA02	1,64	1,10	1,88	1,73	1,66	1,48	2,80	2,01
MC1	1,74	1,27	2,18	1,87	2,35	1,77	3,02	2,26
MC2	2,42	1,44	4,10	2,99	4,22	2,53	7,24	4,05
BG1	1,16	1,06	1,15	1,06	0,94	0,91	1,60	1,11
BG2	1,71	1,27	1,61	1,70	1,31	1,47	2,01	1,75
BIB	1,62	1,23	1,99	1,72	2,10	1,63	2,72	2,04

Analisando as tabelas (3.12 a 3.23) verificamos que, quando  $p$  é par, os Planejamentos Propostos por Machin (MC e MC2) são sempre os mais eficientes na maioria dos pontos. Nos demais pontos temos que o *Planejamento Transversal* (T) é o mais eficiente.



Por outro lado, quando  $p = 5$  ou  $7$  temos que em quase todos os pontos o *Planejamento Transversal* (T) é o mais eficiente, sendo que nos outros pontos o BIB é o mais eficiente. Para  $p = 3$ , temos que o *Planejamento Transversal* (T), RAO2 e RAO1 se alternam em termos de maior eficiência, com predominância do *Planejamento Transversal* (T) e RAO2. Podemos ainda observar que os Planejamentos Propostos por Machin (MC, MC1 e MC2) juntamente com o BIB são sempre mais eficientes do que o *Planejamento Longitudinal Puro*. Este fato também ocorre com os Planejamentos Propostos por Berger (BG2) para  $p = 8$ , RAO2 para  $p = 3, 7$  ou  $8$ , RAO1 para  $p = 3$  e *Transversal* (T) para  $p$  diferente de 3.

É importante destacar que, a partir dos resultados obtidos, ficou evidente que existem propostas de *Planejamentos Mistos* (*Transversal*, Machin e BIB) que são mais eficientes do que o *Planejamento Longitudinal Puro*, para todas as estruturas de matrizes de covariância consideradas, sendo que o Planejamento Proposto por Machin é quase sempre o mais eficiente nas situações onde ele se encontra definido. Quanto ao *Planejamento Transversal* (T), apesar de nem sempre ser mais eficiente do que o *Planejamento Longitudinal Puro*, devemos fazer a ressalva de que o mesmo em muitas situações é o mais eficiente juntamente com o Planejamento Proposto por Machin ou isoladamente. Este fato ocorre em geral quando as correlações não são muito altas e quando o número de condições de avaliação é maior que o grau do polinômio ajustado, concordando com as conclusões tiradas por Berger (1986).

## CAPÍTULO 4

### A CONDIÇÃO DE INVARIÂNCIA, A REDUÇÃO NO NÚMERO DE UNIDADES EXPERIMENTAIS E SUGESTÕES FINAIS

Neste capítulo vamos demonstrar a condição de invariância da eficiência relativa, mostrar como a redução no número de *unidades experimentais* pode ser feita até um valor limite para eficiência e apresentar sugestões para pesquisas futuras.

#### 4.1 - A CONDIÇÃO DE INVARIÂNCIA

Na sub-seção (3.1.1), consideramos o vetor  $\tilde{t}$  da seguinte forma :  $\tilde{t} = (t_1, t_2, \dots, t_p)$  e afirmamos a validade dos resultados subreferentes para a eficiência para qualquer valor  $\tilde{t} = (t_1, t_2, \dots, t_p)$  igualmente espaçados. Suponha agora que  $\tilde{t}^* = c_1(\tilde{t} + \tilde{c}_2)$ , onde  $c_1$  é uma constante e  $\tilde{c}_2$  um vetor da forma  $\tilde{c}_2 = a \times \mathbf{1}_p$  sendo que  $a$  é um número real. Através desta nova definição do vetor  $\tilde{t}$  verificamos que o mesmo sofreu um

deslocamento. Entretanto, como as condições de avaliação são igualmente espaçadas, esta translação ocorrida em  $t$  apesar de modificar a matriz  $X$ , não irá alterar a eficiência dos planejamentos.

Para demonstrar o que foi dito anteriormente, iremos inicialmente desenvolver o denominador da expressão (2.13) que é dado por :  $n^2 \mid X^{*'} \Sigma^{-1} X^* \mid$ .

Podemos escrever  $X^{*'} \Sigma^{-1} X^*$  como sendo :

$$X^{*'} \Sigma^{-1} X^* = \begin{bmatrix} 1_p' \\ t^{*'} \end{bmatrix} \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} 1_p \\ t^* \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

A partir de (4.1), temos que :

$$X^{*'} \Sigma^{-1} X^* = \begin{bmatrix} 1_p' \Sigma^{-1} 1_p & 1_p' \Sigma^{-1} t^* \\ t^{*'} \Sigma^{-1} 1_p & t^{*'} \Sigma^{-1} t^* \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Fazendo agora o determinante de  $\mid X^{*'} \Sigma^{-1} X^* \mid$  vamos obter :

$$\mid X^{*'} \Sigma^{-1} X^* \mid = (1_p' \Sigma^{-1} 1_p) (t^{*'} \Sigma^{-1} t^*) - (t^{*'} \Sigma^{-1} 1_p) (1_p' \Sigma^{-1} t^*) \quad (4.3)$$

Substituindo  $\underset{\sim}{t}^* = \underset{\sim}{c}_1(\underset{\sim}{t} + \underset{\sim}{c}_2)$  em (4.3) resulta :

$$\begin{aligned} | \underset{\sim}{X}^{*'} \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{X}^* | &= \{ (\underset{\sim}{1}_p' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{1}_p) [(\underset{\sim}{t} + \underset{\sim}{c}_2)' \underset{\sim}{c}_1 \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{c}_1 (\underset{\sim}{t} + \underset{\sim}{c}_2)] - \\ &\quad [(\underset{\sim}{t} + \underset{\sim}{c}_2)' \underset{\sim}{c}_1 \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{1}_p] [\underset{\sim}{1}_p' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{c}_1 (\underset{\sim}{t} + \underset{\sim}{c}_2)] \} \Rightarrow \\ | \underset{\sim}{X}^{*'} \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{X}^* | &= \{ (\underset{\sim}{1}_p' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{1}_p) \underset{\sim}{c}_1^2 (\underset{\sim}{t} + \underset{\sim}{c}_2)' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} (\underset{\sim}{t} + \underset{\sim}{c}_2) - \\ &\quad \underset{\sim}{c}_1^2 [(\underset{\sim}{t} + \underset{\sim}{c}_2)' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{1}_p] [\underset{\sim}{1}_p' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} (\underset{\sim}{t} + \underset{\sim}{c}_2)] \} \end{aligned}$$

Como  $\underset{\sim}{c}_2 = a \times \underset{\sim}{1}_p$ , podemos escrever a expressão anterior da seguinte forma :

$$\begin{aligned} | \underset{\sim}{X}^{*'} \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{X}^* | &= \underset{\sim}{c}_1^2 \{ (\underset{\sim}{1}_p' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{1}_p) (\underset{\sim}{t} + a \underset{\sim}{1}_p)' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} (\underset{\sim}{t} + a \underset{\sim}{1}_p) - \\ &\quad [(\underset{\sim}{t} + a \underset{\sim}{1}_p)' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{1}_p] [\underset{\sim}{1}_p' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} (\underset{\sim}{t} + a \underset{\sim}{1}_p)] \} \\ | \underset{\sim}{X}^{*'} \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{X}^* | &= \underset{\sim}{c}_1^2 \{ (\underset{\sim}{1}_p' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{1}_p) (\underset{\sim}{t} \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{t} + a \underset{\sim}{t} \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{1}_p + a \underset{\sim}{1}_p' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{t} \\ &\quad + a^2 (\underset{\sim}{1}_p' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{1}_p) - (\underset{\sim}{t} \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{1}_p + a \underset{\sim}{1}_p' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{1}_p) (\underset{\sim}{1}_p' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{t} \\ &\quad + a \underset{\sim}{1}_p' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{1}_p) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
| \underset{\sim}{X}^{*\prime} \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{X}^* | &= c_1^2 \{ (\underset{\sim}{1}' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{1}) (\underset{\sim}{t}' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{t}) + a (\underset{\sim}{1}' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{1}) (\underset{\sim}{t}' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{1}) \\
&+ a (\underset{\sim}{1}' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{1}) (\underset{\sim}{1}' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{t}) + a^2 (\underset{\sim}{1}' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{1}) (\underset{\sim}{1}' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{1}) \\
&- (\underset{\sim}{t}' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{1}) (\underset{\sim}{1}' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{t}) - a (\underset{\sim}{t}' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{1}) (\underset{\sim}{1}' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{1}) \\
&- a (\underset{\sim}{1}' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{1}) (\underset{\sim}{1}' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{t}) - a^2 (\underset{\sim}{1}' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{1}) (\underset{\sim}{1}' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{1}) \}
\end{aligned}$$

Simplificando este resultado, temos que :

$$| \underset{\sim}{X}^{*\prime} \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{X}^* | = c_1^2 \{ (\underset{\sim}{1}' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{1}) (\underset{\sim}{t}' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{t}) - (\underset{\sim}{t}' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{1}) (\underset{\sim}{1}' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{t}) \}$$

$$| \underset{\sim}{X}^{*\prime} \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{X}^* | = c_1^2 | \underset{\sim}{X}' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{X} | \quad (4.4)$$

A menos da constante  $c_1$ , a expressão anterior é idêntica a (4.3).

De forma análoga, vamos desenvolver o numerador de

$$(2.13). \text{ Podemos escrever } r^2 | \underset{\sim}{X}' [ \sum_{j=1}^g \underset{\sim}{M}_j' ( \underset{\sim}{M}_j \underset{\sim}{\Sigma} \underset{\sim}{M}_j' )^{-1} \underset{\sim}{M}_j ] \underset{\sim}{X} |$$

como :

$$r^2 | \underset{\sim}{X}' \underset{\sim}{V} \underset{\sim}{X} | \quad (4.5)$$

$$\text{onde, } \underset{\sim}{V} = \sum_{j=1}^g \underset{\sim}{M}_j' ( \underset{\sim}{M}_j \underset{\sim}{\Sigma} \underset{\sim}{M}_j' )^{-1} \underset{\sim}{M}_j.$$

Utilizando a expressão (4.4), temos que o determinante da expressão (4.5), será dado por :

$$\begin{vmatrix} \tilde{X}' & \tilde{V} & \tilde{X} \\ \sim & \sim & \sim \end{vmatrix} = c_1^2 \left\{ \begin{pmatrix} 1' & \tilde{V} & 1 \\ \sim_P & \sim & \sim_P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' & \tilde{V} & t \\ \sim & \sim & \sim \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t' & \tilde{V} & 1 \\ \sim & \sim & \sim_P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1' & \tilde{V} & t \\ \sim_P & \sim & \sim \end{pmatrix} \right\} \quad (4.6)$$

Fazendo então o quociente dos determinantes obtidos em (4.6) e (4.4), vamos cancelar  $c_1^2$ . Com isto, mostramos que para valores de  $t$  igualmente espaçados a eficiência dos planejamentos não se altera. É importante destacar que para a estrutura gerada pelo modelo de efeitos aleatórios não vale a condição de invariância pois,  $\Sigma$  depende de  $t$ .

## 4.2 - REDUÇÃO NO NÚMERO DE UNIDADES EXPERIMENTAIS

É de grande interesse para o nosso estudo podermos pensar na redução do número de *unidades experimentais* programadas a priori para serem acompanhadas nos *Planejamentos Mistos* propostos, desde que os mesmos permaneçam mais eficientes do que o *Planejamento Longitudinal Puro*. Seguindo esta linha de raciocínio, iremos enunciar um teorema que nos permitirá a avaliação deste objetivo.

## Teorema

Se tomarmos uma fração ( $f$ ) das  $n$  unidades experimentais utilizadas pelo *Planejamento Longitudinal Puro* teremos que a eficiência do *Planejamento Misto* se reduzirá a  $f^2$  do seu valor original.

## Demonstração

Para os *Planejamentos Mistos* propostos, iremos alocar  $r$  unidades experimentais ou uma fração delas (RA01 e RA02) em cada um dos  $g$  grupos que serão acompanhados ao longo das  $v$  condições de avaliação. Deste modo, temos que vão ser geradas  $rgv$  observações. Fazendo então :

$$rgv = (fn)p \quad \Rightarrow \quad r = \frac{(fn)p}{gv}$$

Substituindo  $r$  em (2.13), encontraremos :

$$E = \frac{f^2 \frac{2}{p}}{g^2 v^2} \times \frac{\left| \underset{\sim}{X}' \left[ \sum_{j=1}^g \underset{\sim}{M}_j' (\underset{\sim}{M}_j \underset{\sim}{\Sigma} \underset{\sim}{M}_j')^{-1} \underset{\sim}{M}_j \right] \underset{\sim}{X} \right|}{\left| \underset{\sim}{X}' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{X} \right|} \quad (4.7)$$

Utilizando agora na expressão (4.7) os respectivos valores de  $g$  e  $v$  para cada um dos *Planejamentos Mistos* propostos em (2.4.2.1), (2.4.2.2), (2.4.2.3), (2.4.2.5) e (2.4.2.6), constatamos que as eficiências definidas em (2.14), (2.15),

(2.16), (2.19) e (2.20), respectivamente, ficarão multiplicadas por  $f^2$ .

Através da tabela abaixo, vamos apresentar os valores de  $g$  e  $v$  para os Planejamentos citados anteriormente.

Tabela 4.1 : Valores de  $g$  e  $v$  para os Planejamentos Propostos

Planejamento Proposto	$g$	$v$
T	$p$	1
DC	$p-1$	2
TC	$p-2$	3
BG	$g$	$v$
MC	$g$	$v$

De forma análoga, fazendo em (2.4.2.4) e (2.4.2.7) o total de observações obtidas através do *Planejamento Misto* igual a  $f(np)$  verificamos que a eficiência ficará também multiplicada por  $f^2$ .

Com os resultados que obtivemos para  $3 \leq p \leq 8$  temos que efetivamente, esta redução no total de *unidades experimentais* é perfeitamente viável desde que a eficiência dos *Planejamentos Mistos* em relação ao *Planejamento Longitudinal Puro* seja igual ou superior a 1.



Para cada valor de  $p$  e para cada estrutura de covariância iremos mostrar, de forma geral através da tabela 4.2, como esta redução no número de *unidades experimentais* inicialmente previstas para serem utilizadas pelo *Planejamento Misto* pode ocorrer. Na construção desta tabela, vamos considerar somente os *Planejamentos Mistos* que são os mais eficientes. Devemos ainda ressaltar que, para os valores da tabela 4.2, quando a correlação cresce esta redução é maior.

Tabela 4.2 : Porcentagem de *unidades experimentais* a serem utilizadas pelos *Planejamentos Mistos* (%)

p	Uniforme	AR(1)	AR GERAL	Ef. Aleat.
3	96,2 a 94,5	94,1 a 85,7	93,7 a 81,6	98,5 a 92,1
4	92,5 a 79,6	90,9 a 63,5	84,5 a 66,2	97,1 a 70,7
5	89,1 a 80,1	89,1 a 60,0	78,8 a 62,1	94,1 a 70,9
6	86,1 a 66,4	88,0 a 46,2	79,3 a 57,4	90,9 a 49,4
7	83,3 a 70,0	87,0 a 45,6	73,9 a 53,3	86,7 a 53,2
8	80,8 a 57,9	86,4 a 36,6	72,5 a 50,9	81,9 a 37,1

Observando a tabela acima, verificamos que para todas as estruturas de covariância consideradas a redução no total de *unidades experimentais* é significativa. Este aspecto, além de reduzir custos pode proporcionar um melhor acompanhamento do estudo.

A seguir vamos mostrar através de um exemplo como obtivemos os valores acima.

Para a estrutura de covariância AR(1), com  $p = 8$ , encontramos o valor limite de 36,6% , que corresponde ao Planejamento Proposto por Machin (MC2) que contempla a formação de quatro grupos ( $g=4$ ) com duas condições de avaliação em cada um deles ( $v=2$ ), sendo que  $\rho = 0,9$  (ver Figura 3.12). Para este valor de  $p$ , temos que o referido planejamento é o mais eficiente e apresenta como valor da eficiência  $E = 7,45$ . Utilizando agora o teorema enunciado anteriormente, temos que :

$$f^2 \times E \geq 1$$

Logo,

$$f \geq \sqrt{1 / E} \quad (4.8)$$

Substituindo  $E = 7,45$  na expressão (4.8), encontramos  $f = 36,6\%$ .

Inicialmente, no *Planejamento Misto*, iríamos gerar o mesmo número de observações do *Planejamento Longitudinal Puro*, ou seja,  $8n$  observações. A partir do resultado obtido, vamos ter que gerar somente  $2,928n$  observações no *Planejamento Misto* de tal forma que o mesmo ainda vai permanecer mais eficiente do que o *Planejamento Longitudinal Puro*. Isto implica na alocação de menos unidades experimentais em cada grupo em relação ao previsto a priori. Se fizermos por exemplo  $n = 1000$ , teríamos que distribuir

inicialmente, em cada um dos quatro grupos constituídos, 1000 *unidades experimentais*, totalizando 4000 unidades que gerariam as 8000 observações previstas preliminarmente para o *Planejamento Misto*. Com a redução que obtivemos, vamos agora alocar 366 *unidades experimentais* em cada grupo, totalizando 1464 unidades que por sua vez, vão gerar as 2928 observações necessárias para ainda manter a maior eficiência do *Planejamento Misto*.

Não podemos nos esquecer de comentar que este trabalho foi desenvolvido considerando a aplicação de um único tratamento as *unidades experimentais*.

#### 4.3 - SUGESTÕES FINAIS

Na continuidade deste trabalho, poderemos pensar para pesquisas futuras em estudar o comportamento da eficiência de planejamentos, quando :

- 1) A variável de interesse puder ser descrita por funções lineares de grau superior a dois ou funções não lineares;
- 2) As *unidades experimentais* estiverem alocadas a mais de um tratamento; e

3) Atribuírmos quantidades diferentes de *unidades experimentais* aos diferentes grupos formados, como já efetuado nos Planejamentos Propostos por Rao e Rao (1966).

## APÊNDICE

1) O Estimador de Máxima-Verossimilhança de  $\beta$  e sua variância.

Inicialmente, sabemos que :

$$E(y_{jk}^*) = M_j \mu = M_j X \beta$$

e

$$V(y_{jk}^*) = M_j \Sigma M_j'$$

Como os dados são gerados a partir da distribuição normal multivariada, temos que a função de verossimilhança para  $\beta$  é da seguinte forma :

$$L = \frac{1}{(2\pi |I_n \otimes V(y_{jk}^*)|)^{np/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (y_{jk}^* - M_j X \beta)' (I_n \otimes V(y_{jk}^*))^{-1} (y_{jk}^* - M_j X \beta) \right\}$$

$$\ln L = \ln \frac{1}{(2\pi |I_n \otimes V(y_{jk}^*)|)^{np/2}} - \frac{1}{2} (y_{jk}^* - M_j X \beta)' [I_n \otimes V(y_{jk}^*)]^{-1} (y_{jk}^* - M_j X \beta)$$

$$\ln L = \ln \frac{1}{(2\pi |DIAG(M_j \Sigma M_j')|)^{np/2}} - \frac{1}{2} (y_{jk}^* - M_j X \beta)' [DIAG(M_j \Sigma M_j')]^{-1} (y_{jk}^* - M_j X \beta)$$

$$\ln L = \ln \frac{1}{(2\pi |\text{DIAG}(\underset{\sim}{M}_j \underset{\sim}{\Sigma} \underset{\sim}{M}_j')|)^{np/2}} - \frac{1}{2} \{ \underset{\sim}{y}_{jk}^* [\text{DIAG}(\underset{\sim}{M}_j \underset{\sim}{\Sigma} \underset{\sim}{M}_j')]^{-1} \underset{\sim}{y}_{jk} +$$

$$- 2 \underset{\sim}{y}_{jk}^* [\text{DIAG}(\underset{\sim}{M}_j \underset{\sim}{\Sigma} \underset{\sim}{M}_j')]^{-1} \underset{\sim}{M}_j \underset{\sim}{X} \underset{\sim}{\beta} +$$

$$+ \underset{\sim}{\beta}' \underset{\sim}{X}' \underset{\sim}{M}_j' [\text{DIAG}(\underset{\sim}{M}_j \underset{\sim}{\Sigma} \underset{\sim}{M}_j')]^{-1} \underset{\sim}{M}_j \underset{\sim}{X} \underset{\sim}{\beta} \}$$

Assumindo que  $\underset{\sim}{\Sigma}$  é conhecido, e fazendo a derivada primeira da expressão anterior em relação a  $\underset{\sim}{\beta}$ , igual a zero, encontramos :

$$\frac{\partial L}{\partial \underset{\sim}{\beta}} = - \frac{1}{2} \{ - 2 \underset{\sim}{X}' \underset{\sim}{M}_j' [\text{DIAG}(\underset{\sim}{M}_j \underset{\sim}{\Sigma} \underset{\sim}{M}_j')]^{-1} \underset{\sim}{y}_{jk}^* + 2 \underset{\sim}{X}' \underset{\sim}{M}_j' [\text{DIAG}(\underset{\sim}{M}_j \underset{\sim}{\Sigma} \underset{\sim}{M}_j')]^{-1} \underset{\sim}{M}_j \underset{\sim}{X} \underset{\sim}{\beta} \}$$

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}} = \{ \underset{\sim}{X}' \underset{\sim}{M}_j' [\text{DIAG}(\underset{\sim}{M}_j \underset{\sim}{\Sigma} \underset{\sim}{M}_j')]^{-1} \underset{\sim}{M}_j \underset{\sim}{X} \}^{-1} \underset{\sim}{X}' \underset{\sim}{M}_j' [\text{DIAG}(\underset{\sim}{M}_j \underset{\sim}{\Sigma} \underset{\sim}{M}_j')]^{-1} \underset{\sim}{y}_{jk}^*$$

Expandindo  $\text{DIAG}(\underset{\sim}{M}_j \underset{\sim}{\Sigma} \underset{\sim}{M}_j')$  em forma matricial, podemos escrever  $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$  de forma mais simplificada.

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}} = \{ \underset{\sim}{X}' [\sum_{j=1}^n \underset{\sim}{M}_j' (\underset{\sim}{M}_j \underset{\sim}{\Sigma} \underset{\sim}{M}_j')^{-1} \underset{\sim}{M}_j] \underset{\sim}{X} \}^{-1} \underset{\sim}{X}' [\sum_{j=1}^n \underset{\sim}{M}_j' (\underset{\sim}{M}_j \underset{\sim}{\Sigma} \underset{\sim}{M}_j')^{-1} \underset{\sim}{y}_{jk}^*]$$

Como vamos ter  $g$  grupos de  $n_j$  unidades experimentais em cada um deles com a restrição de  $\sum_{j=1}^g n_j = n$ , podemos finalmente escrever  $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$  igual a :

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}} = \{ \underset{\sim}{X}' [\sum_{j=1}^g n_j \underset{\sim}{M}_j' (\underset{\sim}{M}_j \underset{\sim}{\Sigma} \underset{\sim}{M}_j')^{-1} \underset{\sim}{M}_j] \underset{\sim}{X} \}^{-1} \underset{\sim}{X}' [\sum_{j=1}^g n_j \underset{\sim}{M}_j' (\underset{\sim}{M}_j \underset{\sim}{\Sigma} \underset{\sim}{M}_j')^{-1} \underset{\sim}{y}_{jk}^*]$$

A variância de  $\hat{\beta}$  será dada por :

$$\text{Var}(\hat{\beta}) = \text{Var}\left\{X' \left[ \sum_{j=1}^g n_j M_j' (M_j \Sigma M_j')^{-1} M_j \right] X \right\}^{-1} X' \left[ \sum_{j=1}^g n_j M_j' (M_j \Sigma M_j')^{-1} y_{jk}^* \right]$$

$$\text{Var}(\hat{\beta}) = \left\{ X' \left[ \sum_{j=1}^g n_j M_j' (M_j \Sigma M_j')^{-1} M_j \right] X \right\}^{-1} X' \text{Var} \left[ \sum_{j=1}^g n_j M_j' (M_j \Sigma M_j')^{-1} y_{jk}^* \right] X \\ \times \left\{ X' \left[ \sum_{j=1}^g n_j M_j' (M_j \Sigma M_j')^{-1} M_j \right] X \right\}^{-1}$$

$$\text{Var}(\hat{\beta}) = \left\{ X' \left[ \sum_{j=1}^g n_j M_j' (M_j \Sigma M_j')^{-1} M_j \right] X \right\}^{-1} X' \sum_{j=1}^g n_j M_j' (M_j \Sigma M_j')^{-1} \text{Var}(y_{jk}^*) X \\ (M_j \Sigma M_j')^{-1} M_j X \left\{ X' \left[ \sum_{j=1}^g n_j M_j' (M_j \Sigma M_j')^{-1} M_j \right] X \right\}^{-1}$$

$$\text{Var}(\hat{\beta}) = \left\{ X' \left[ \sum_{j=1}^g n_j M_j' (M_j \Sigma M_j')^{-1} M_j \right] X \right\}^{-1} X' \sum_{j=1}^g n_j M_j' (M_j \Sigma M_j')^{-1} (M_j \Sigma M_j') X \\ (M_j \Sigma M_j')^{-1} M_j X \left\{ X' \left[ \sum_{j=1}^g n_j M_j' (M_j \Sigma M_j')^{-1} M_j \right] X \right\}^{-1}$$

$$\text{Var}(\hat{\beta}) = \left\{ X' \left[ \sum_{j=1}^g n_j M_j' (M_j \Sigma M_j')^{-1} M_j \right] X \right\}^{-1} \left\{ X' \sum_{j=1}^g n_j M_j' (M_j \Sigma M_j')^{-1} M_j X \right\} \\ \left\{ X' \left[ \sum_{j=1}^g n_j M_j' (M_j \Sigma M_j')^{-1} M_j \right] X \right\}^{-1}$$

Logo, temos que :

$$\text{Var}(\hat{\beta}) = \left\{ X' \left[ \sum_{j=1}^g n_j M_j' (M_j \Sigma M_j')^{-1} M_j \right] X \right\}^{-1}$$

2)  $\underset{\sim}{X}' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{X}$  é positiva definida.

#### Demonstração

Seja  $\underset{\sim}{X}$  uma matriz de dimensão  $(p \times q)$ , com posto  $\underset{\sim}{(X)} = q \leq p$ , e  $\underset{\sim}{z}$  um vetor  $(q \times 1)$ . Sabemos que  $\underset{\sim}{X}' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{X}$  é positiva definida se e somente se :  $\underset{\sim}{z}' \underset{\sim}{X}' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{X} \underset{\sim}{z} > 0$ .

$$\underset{\sim}{z}' \underset{\sim}{X}' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{X} \underset{\sim}{z} = ( \underset{\sim}{X} \underset{\sim}{z} )' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} ( \underset{\sim}{X} \underset{\sim}{z} )$$

$$( \underset{\sim}{X} \underset{\sim}{z} )' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} ( \underset{\sim}{X} \underset{\sim}{z} ) > 0 \text{ para } \underset{\sim}{X} \underset{\sim}{z} \neq 0 \Leftrightarrow \underset{\sim}{z} \neq 0$$

$$( \underset{\sim}{X} \underset{\sim}{z} )' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} ( \underset{\sim}{X} \underset{\sim}{z} ) = 0 \text{ para } \underset{\sim}{X} \underset{\sim}{z} = 0 \Leftrightarrow \underset{\sim}{z} = 0$$

logo, podemos dizer que,  $\underset{\sim}{X}' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} \underset{\sim}{X}$  é positiva definida.

Outro importante resultado, diz respeito as partições efetuadas na matriz de covariância  $\underset{\sim}{\Sigma}$  do *Planejamento Longitudinal Puro* que nos permitirá a geração das respectivas matrizes de covariância do *Planejamento Misto*. Como tais partições geram submatrizes a partir dos elementos da diagonal principal, temos que estas submatrizes são também positivas definidas ( ver Ortega (1987) ).



## BIBLIOGRAFIA

ANDERSON, T.W. (1958). *Introduction to Multivariate Statistical Analysis*. Wiley, New York.

BALTES, P.B. and NESSELROADE, J.R. (1979). *Longitudinal Research in the Study of Behavior and Development*. Academic Press, New York.

BERGER, M.P.F. (1986). A comparison of efficiencies of longitudinal, mixed longitudinal, and cross-sectional designs. *Journal of Educational Statistics*, 3, 171-181.

BÖCK, R.D. (1975). *Multivariate Statistical Methods in Behavioral Research*. McGraw-Hill, New York.

BOLDRINI, J.L., COSTA, S.I.R., FIGUEIREDO, V.L. e WETZLER, H.G. (1980). *Álgebra Linear*. Harbra, São Paulo.

BOX, G.E.P. (1950). Problems in the analysis of growth and wear curves. *Biometrics*, 6, 362-389.

BOX, G.E.P. and Hunter, W.G. and Hunter, J.S. (1978). *Statistics for Experimenters*. Wiley, New York.

- BRYANT, E. and GILLINGS, D. (1985). Statistical Analysis of longitudinal repeated measures designs. In: *Biostatistics, Statistics in Biomedical, Public Health and Environmental Sciences*. P.K.Sen (ed.) North-Holland, Amsterdam.
- COCHRAN, W.G. and COX, G.M. (1957). *Experimental Design*. Second Edition. Wiley, New York.
- COOK, N.R. and WARE, J.H. (1983). Design and analysis methods for longitudinal research. *Annual Review of Public Health*, 4, 1-24.
- COX, D.R. (1958). *Planning of Experiments*. Wiley, New York.
- ELANDT-JOHNSON, R.C. and JOHNSON, N.L. (1980). *Survival models and data analysis*. Wiley, New York.
- ELSTON, R.C. and GRIZZLE, J.E. (1962). Estimation of time-response curves and their confidence bands. *Biometrics*, 18, 148-159.
- FEDOROV, V.V. (1972). *Theory of Optimal Experiments*. Academic Press, New York.

- FISHER, R.A. (1971). *The Design of Experiments*.  
Ninth Edition. Hafner Press, New York.
- FLEISS, L.J. (1986). *The Design and Analysis of  
Clinical Experiments*. Wiley, New York.
- GEISSER, S. (1980). Growth curve analysis. In:  
*Handbook of Statistics* (vol.1). P.R. Krishnaiah  
(ed.). North Holland, Amsterdam, 89-115.
- GOLDFARB, N. (1960). *An Introduction to Longitudi-  
nal Statistical Analysis*. Glencoe, IL: Free Press.
- GOLDSTEIN, H. (1979). *The Design and Analysis of  
Longitudinal Studies*. Academic Press, London.
- GRAYBILL, F.A. (1976). *Theory and Application of  
the Linear Model*. Duxbury Press, Massachusetts.
- GRAYBILL, F.A. (1983). *Matrices with Applications  
in Statistics*. Second Edition. Wadsworth, California.
- JENNRICH, R.I. and SCHLUCHTER, M.D. (1986). Unbalanced repeated-measures models with structured covariance matrices. *Biometrics* 42, 805-820.

- KALBFLEISCH, J.D. and PRENTICE, R.L. (1980). *The Statistical Analysis of Failure Time Data*. Wiley, New York.
- KEMPTHORNE, O. (1952). *Design and Analysis of Experiments*. Wiley, New York.
- KLEINBAUM, D.G. (1973). A generalization of the growth curve model which allows missing data. *Journal of the Multivariate Analysis*, 3, 117-124.
- KOWALSKI, C.J. and GUIRE, K.E. (1974). Longitudinal data analysis. *Growth*, 38, 131-169.
- LAIRD, N.M. and WARE, J.H. (1982). Random effects models for longitudinal data. *Biometrics*, 38, 963-974.
- MACHIN, D. (1975). On a design problem in growth studies. *Biometrics*, 31, 749-753.
- MARDIA, K.V.; KENT, J.T. and BIBBY, J.M. (1979). *Multivariate Analysis*. Academic Press, London.
- MORRISON, D.F. (1976). *Multivariate Statistical Methods*. Second edition. McGraw-Hill, New York.

ORTEGA, J.M. (1987). *Matrix Theory: A Second Course*.  
Plenum Press, New York.

POTTHOFF, R.F. and ROY, S.N. (1964). A generalized  
multivariate analysis model useful especially for  
growth curve problems. *Biometrika*, 51, 313-326.

RAO, M.N. and RAO, C.R. (1966). Linked cross-section  
nal study for determining norms and growth rates -  
a pilot survey on Indian school-going boys. *Sankhya*  
B, 28, 237-258.

RAO, C.R. (1973). *Linear Statistical Inference and  
its Applications*. Second Edition. Wiley, New York.

SCHAE, K.W. (1965). A general model for the study  
of developmental problems. *Psychological Bulletin*,  
64, 92 -107.

SEARLE, S.R. (1982). *Matrix Algebra Useful for Sta-  
tistics*. Wiley, New York.

SEARLE, S.R. (1971). *Linear Models*. Wiley, New  
York.

SINGER, J.M. (1977). *Análise de Curvas de Crescimento*. Dissertação de Mestrado. Universidade de São Paulo, Departamento de Estatística.

SINGER, J.M. e ANDRADE, D.F. (1986). *Análise de Dados Longitudinais*. IMECC/ABE, VII SINAPE, Campinas.

SOC. (1989). Software Científico desenvolvido pelo Núcleo Tecnológico de Informática para Agropecuária da EMBRAPA (NTIA/EMBRAPA) - Campinas.

VAN'T HOF, M.A., ROEDE, M.J. and KOWALSKI, C.J. (1977). A mixed longitudinal data analysis model. *Human Biology*, 49, 165-179.

WINER, B.J. (1971). *Statistical Principles in Experimental Design*. Second Edition. McGraw-Hill, New York.

WISHART, J. (1938). Growth rate determinations in nutrition studies with the bacon pig and their analysis. *Biometrika*, 30, 16-28.

WOOLSON, R.F., LEEPER, J.D. and CLARKE, W.R. (1978).

Analysis of incomplete data from longitudinal and mixed longitudinal studies. *Journal of the Royal Statistical Society, Ser.A*, **141**, 242-252.

WOOLSON, R.F. and LEEPER, J.D. (1980). Growth curve

analysis of complete and incomplete longitudinal data. *Communications in Statistics, A9*, **14**, 1491-1513.